高級超越函数

第二册

[美國]彼得曼遺稿編輯部編
主任 Arthur Erdélyi
A. 爱尔台里
張致中譯

科学技術出版社

內 容 提 要

本書就近代应用数学上所有一切特殊函数的歷史起源、定义、理論、有关的基本公式都作了較全面的系統介紹，并举出了相应的参考資料，包罗面很廣，是一部学術性及資料性的讀物.

本書共分三册. 第一册所收有 1—6 六章，計：γ-函数；超比函数；勒上特函数；廣义超比級数；超比級数的進一步推廣；合流超比函数.

第二册所收有 7—13 七章，計：貝塞尔函数；抛物柱及迴轉抛物面函数；不完全 γ-函数；正交多項式；球面及超球面調和多項式；多变量正交多項式；橢圓函数与橢圓積分.

第三册所收有 14—19 六章，計：自守函数；拉美函数；馬蒂安函数；数論函数；其他函数；母函数.

本書供大專高年級学生、科学研究工作者、工程師等作參考.

高 級 超 越 函 数

第 二 册

Higher Transcendental Functions Vol. II.

原 著 者 [美國] Staff of the Bateman Manuscript Project
Director: Arthur Erdélyi
原出版者 McGraw-Hill Book Co. Inc., 1953 年版
譯 者 張 致 中

*

科 学 技 術 出 版 社 出 版
(上海南京西路 2004 号)
上海市書刊出版業營業許可証出 079 号
中華書局上海厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

統一書号: 13119 · 117
开本 787×1092 耗 1/27 · 印張 15 23/27 · 字數 297,000
1958 年 2 月第 1 版
1958 年 2 月第 1 次印刷 · 印數 1—2,500
定价: (10) 2,40 元

前　言

本書的目的和歷史已在第一册的引言中說明．現在这本第二册中所包括的有貝塞尔函数及一些特殊合流超比函数，正交多項式及有关材料，橢圓函数及橢圓積分．編纂的方法仍和第一册一样．在本册的各章中，麥格紐斯負責編寫第9及第11章，奧勃赫丁乔負責編寫第7章，特列柯米負責第8，9，10及13各章．由于本册后面几章的定稿是在初稿作者离开 Pasadena 之后才行編成，所以給編輯工作增加了很多困难，在修正稿与初稿之間，有些地方有着剧烈的修改．

关于貝塞尔函数方面，在華特生"貝塞尔函数論"中已有的材料，我們祇作了簡略的介紹，而对該書刊行以后新發現的一些結果則作較为詳細的敍述．抛物柱函数方面，在本册中也介紹得比較全面，但对迴轉抛物面函数則祇作了極簡單的引述，因为最近出版的 H. Buchholz 所著 Die konfluente hypergeometrische Funktion (Springer-Verlag, 1953) 一書已为这一函数提供了詳細的材料．在由積分所定义的一些函数（如誤差函数，指数函数等）中，我們采用的記法（無法一致）是純数学中認为最好的記法以及現有数学表使用者認为最方便的記法之間的一种折衷記法．在正交多項式的几章中，我們簡略地介紹了一些一般的理論，大都取自 Szegö 的著作，主要在說明古典正交多項式的性質，不过，我們認为介紹一些稍較陌生的多項式，离散变量的多項式，超球調和函数以及一些多变量双正交多項式还是有用的．有关橢圓積分及橢圓函数的一章說得比較簡單，但我們希望在研究这些函数时应要用到的一些主要材料都能在这一章中找到，特别是，我們对于第三类橢圓積分的材料收集得比其他方面要多，凡是在研究拉美函数或橢球面波函数时需用的一些材料，实际上在本書中業已齐备．我們希望13章

中的許多公式的表列方法，將增加这一章的实用.

像在第一册中一样，在每章之末都附有参考文献目錄. 書目的多少随各章的題材而不同. 在橢圓積分及橢圓函数一章中所列的参考資料，僅是一些比較新的書和一些必須参考的經典著作. 我們对以前已經刊行的專門書誌目錄中的著作提得較少，而对这些目錄刊行以后新出版的書籍或新發表的論文則提得較多.

書末有記法表及索引，第一册中应用过的一些記法在这里常要用到，我們不再加以說明，其定义可参看第一册末的記法表. 这里所用各种参考方法仍和第一册相同. 文內，对参考文献先寫作者姓名，其后是發表年分，詳細列于章末. 同一節里的方程祇用一个数碼表示，不同節中的方程用章節及方程的数碼表示. 章次是接續第一册計数的，第一至第六章在第一册，第七至第十三章在第二册. 例如 3-7(27) 是指第三章第七節中的方程 (27)，在第一册中. 9-7(12) 則是本書中第九章第七節的方程 (12).

編者在編輯本書时所得到的帮助較少于第一册，錯誤在所难免 欢迎批評指正.

A. 爱尔台里

目　錄

第七章　貝塞尔函数

第一部分　理論部分

7-1.　引言

貝塞尔函数可說是最常用的一种高級超越函数．大概說來，它的出現是与偏微分方程相联系的(通常是当方程中的变数分离开來的时候)，或者是与某些定積分有关．我們对这二种应用都將作扼要的敍述，并从后者着手．

在 1770 年，拉格郎日研究了一个行星环繞太陽的橢圓运动．設 a, b 为橢圓軌道的長半軸和短半軸，并設其离心率为 $\varepsilon=a^{-1}(a^2-b^2)^{1/2}$；令 r, M, E 分別代表矢徑，平近点角及偏近点角．拉格郎日所得的方程为

(1)　$M=E-\varepsilon\sin E$,

(2)　$r=a(1-\varepsilon\cos E)=adM/dE$.

这些式子產生了下面的展开式

(3)　$\sin E=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nM)$,　$\cos E=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(nM)$.

1819 年貝塞尔把这些式子的系数寫成積分式．例如：

$$A_n=(\tfrac{1}{2}\pi n)^{-1}\int_0^{\pi}\cos E\cos(nE-n\varepsilon\sin E)dE.$$

这里出現的積分通过簡單的运算可以用貝塞尔系数來表示[見 7-3(2) 及 7-2(56) 的遞推关系]，(3) 式的第一个展开式变为

(4)　$\sin E=(\tfrac{1}{2}\varepsilon)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nM)J_n(n\varepsilon)/n.$

同样，(3) 式的第二个展开式可变换为

(5)　$\cos E=-\tfrac{1}{2}\varepsilon+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nM)J_n'(n\varepsilon)/n.$

其后到 1824 年，貝塞尔以積分式[見 7-3(2)]为基礎，对現在以其名字命名的函数作了研究.

貝塞尔函数的出現通常都与微分方程相联系. 在華特生的著作"貝塞尔函数論" (Watson, 1944) (这部著作是有关貝塞尔函数的标准著作)中，把这些函数的歷史上溯到 J. 柏努利(大約在 1700). 从欧拉(1764)及泊松(1823)开始，貝塞尔函数就与柱面坐标或球極坐标中的势、波动、或擴散的偏微分方程分不开. 不过，貝塞尔函数有时也与别的微分方程或坐标系有关.

設 x, y, z 为直角坐标，ρ, ϕ, z 为柱面坐标，r, θ, ϕ 为球極坐标，其关系为

(6) $\quad x=\rho\cos\phi, \quad y=\rho\sin\phi, \quad z=z.$

(7) $\quad x=r\sin\theta\cos\phi, \quad y=r\sin\theta\sin\phi, \quad z=r\cos\theta.$

在这些坐标系中，我們有:

(8) $\quad \Delta F=F_{xx}+F_{yy}+F_{zz}=F_{\rho\rho}+\rho^{-1}F_{\rho}+\rho^{-2}F_{\phi\phi}+F_{zz},$

(9) $\quad \Delta F=F_{rr}+2\dfrac{F_r}{r}+\dfrac{F_{\theta\theta}}{r^2}+\operatorname{ctn}\theta\dfrac{F_\theta}{r^2}+\dfrac{F_{\phi\phi}}{r^2\sin^2\phi}.$

如果波动方程 $\Delta F=k^2F=0$ 的所求解的形式为 $f(\rho)g(\phi)h(z)$ 或 $f(r)g(\theta)h(\phi)$，則在每一情形下，有人得出了 f 的常微分方程为:

(10) $\quad \dfrac{d^2f}{d\rho^2}+\rho^{-1}\dfrac{df}{d\rho}+(k^2-\alpha^2-\nu^2\rho^{-2})f=0.$

(11) $\quad r^{-1}\dfrac{d^2(rf)}{dr^2}+[k^2-\nu(\nu+1)r^{-2}]f=0.$

式中 α 及 ν 为分离常数. 这些方程的通解分别为:

(12) $\quad f(\rho)=Z_\nu[\rho(k^2-\alpha^2)^{1/2}].$

(13) $\quad f(r)=r^{-1/2}Z_{\nu+1/2}(kr),$

式中 Z_ν 代表任一貝塞尔函数，或 ν 階貝塞尔函数的常系数綫性組合.

不同坐标系中的波动方程及其解可用以在物理上引導出貝塞尔函数的理論(Weyrich, 1937). 从波源(ξ, η, ζ)發出的一个球面波，頻率ν, 波長λ, 波数$k=2\pi/\lambda$, 可用下面的波动方程來說明

$$R^{-1}e^{-i2\pi(\nu t-R/\lambda)}=R^{-1}e^{-i2\pi\nu t+ikR}.$$

式中R为(ξ, η, ζ)及(x, y, z)两点間的距离. 如果包圍z軸的波源具有均匀的密度和相，則經叠加后可得合成波动形式为

$$(14)\quad u=e^{-i2\pi\nu t}\int_{-\infty}^{\infty}[\rho^2+(z-\zeta)^2]^{-1/2}\exp\{ik[\rho^2+(z-\zeta)^2]^{1/2}\}\,d\zeta.$$

其中$\rho^2=x^2+y^2$, 根据惠更斯原理可知这一函数所代表的是一柱面波. 令$\zeta=z+\rho\operatorname{sh}\tau$, 方程(14)可寫成

$$(15)\quad u=e^{-i2\pi\nu t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik\rho\operatorname{ch}\tau}\,d\tau.$$

这样就得出了第三类貝塞尔函数的松木甞尔特積分表示式.

記法

在这一章里，我們采用華特生貝塞尔函数論中的記法. 在文献上可以看到，但在我們这里不用的一些記法也可以在这里提一提.

在格雷-馬鳩斯的著作(1922, p. 23 及 25)中用二个函数$F_\nu(z)$及$G_\nu(z)$,

$$(16)\quad F_\nu(z)=z^{-\frac{1}{2}\nu}J_\nu(2z^{\frac{1}{2}})$$

$$(17)\quad G_\nu(z)=\tfrac{1}{2}i\pi H_\nu^{(1)}(z).$$

楊基-愛姆特(1945, p. 128)用

$$(18)\quad \Lambda_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}J_\nu(z).$$

在魏塔克耳-華特生(1946, p. 373)的著作中，修正亨克尔函数$K_\nu(z)$定义为

$$(19)\quad K_\nu(z)=\tfrac{1}{2}\pi[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)]\operatorname{ctn}(\nu\pi).$$

这和我們在7-2(13)中的記法有所不同.

一个与紐孟函数$Y_\nu(z)$, 7-2(4), 密切相关的函数以$\boldsymbol{Y}_\nu(z)$表

示(Watson, 1944, p. 63)或以$\overline{Y}_\nu(z)$表示(Gray-Mathews, 1922, p. 24),

(20) $$\boldsymbol{Y}_\nu(z)=\overline{Y}_\nu(z)=\pi Y_\nu(z)e^{i\nu\pi}\sec(\nu\pi).$$

一些"有关"函数的其他記法,見 7-5-6 節.

7-2. 貝塞尔微分方程

7-2-1. 一般階的貝塞尔函数

貝塞尔函数是下面的貝塞尔方程的解:

(1) $$\nabla_\nu w\equiv z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-\nu^2)w=z\frac{d}{dz}\left(z\frac{dw}{dz}\right)+(z^2-\nu^2)w=0;$$

ν, z 不受限制,但是在目前我們將假定 ν 不为整数 (ν 取整数时見 7-2-4 節). 微分方程 (1) 是超比微分方程的一个極限情形(見 Klein, 1933, p.156);它在 $z=0$ 上具有一个正則型的奇点,在 $z=\infty$ 上具有一个非正則型的奇点;所有其他的点都是这一微分方程的尋常点. 求一个綫性微分方程在正則型奇点的鄰域中的解的标准方法(見 Whittaker-Watson, 1927, 10. 3) 引出了解

(2) $$J_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}z)^{2m+\nu}/[m!\Gamma(m+\nu+1)]$$

及 $J_{-\nu}(z)$. 第一个解 $J_\nu(z)$ 称为第一类貝塞尔函数, z 是貝塞尔函数的变量, ν 为其階. 容易看出, $z^{-\nu}J_\nu(z)$ 的級数絕对收斂,且在 z 及 ν 的任何有界域中一致收斂. 根据康曼尔关系式 6-3(7), 方程 (2) 又可寫为:

(3) $$J_\nu(z)=(\tfrac{1}{2}z)^\nu {}_0F_1(\nu+1;\ -\tfrac{1}{4}z^2)/\Gamma(\nu+1)$$
$$=(\tfrac{1}{2}z)^\nu e^{-iz}{}_1F_1(\nu+\tfrac{1}{2};\ 2\nu+1;\ 2iz)/\Gamma(\nu+1).$$

綫性組合

(4) $$Y_\nu(z)=(\sin\nu\pi)^{-1}[J_\nu(z)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(z)],$$

(5) $$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z)$$
$$=[i\sin(\nu\pi)]^{-1}[J_{-\nu}(z)-J_\nu(z)e^{-i\pi\nu}],$$

(6) $$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iY_\nu(z)$$
$$=(i\sin\nu\pi)^{-1}[J_\nu(z)e^{i\nu\pi}-J_{-\nu}(z)]$$

也是 (1) 的解. Y_ν 称为第二类贝塞尔函数或紐孟函数. $H_\nu^{(1)}$ 及 $H_\nu^{(2)}$ 是第三类贝塞尔函数,又称为第一类及第二类亨克尔函数. 由 (5) 及 (6) 可得

(7) $$J_\nu(z)=\tfrac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)],$$

(8) $$Y_\nu(z)=\tfrac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z)-H_\nu^{(2)}(z)]/i.$$

从定义可知

(9) $$H_{-\nu}^{(1)}(z)=e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z),\quad H_{-\nu}^{(2)}(z)=e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z).$$

又,如以 $\bar{z}$ 表示 z 的共轭复数,对于其他量也用同样記法,则

(10) $$\overline{J_\nu(z)}=J_{\bar{\nu}}(\bar{z}),\quad \overline{Y_\nu(z)}=Y_{\bar{\nu}}(\bar{z}),\quad \overline{H_\nu^{(1)}(z)}=H_{\bar{\nu}}^{(2)}(\bar{z}),$$
$$\overline{H_\nu^{(2)}(z)}=H_{\bar{\nu}}^{(1)}(\bar{z}),$$

特别是,如階 ν 为实数而变量 z 为正数,则 J_ν 及 Y_ν 將都是实数. 所有这四个貝塞尔函数在沿負实軸 0 至 $-\infty$ 間剖割的 z 平面内都是單值的. 对于一般的 ν, 它們在 $z=0$ 上都有枝点. 第一类貝塞尔函数顯然是 ν 的整函数,在后面我們將会看到,如果对整数 $\nu=n$, 第二、第三类貝塞尔函数在適当的定义下也將是 ν 的整函数.

7-2-2. 一般階的修正貝塞尔函数

如果在貝塞尔微分方程 (1) 中以 iz 代 z, 則得

(11) $$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-(z^2+\nu^2)w=0.$$

如 ν 不为整数(整数値的 ν, 見 7-2-5 節),則 $J_\nu(iz)$ 及 $J_{-\nu}(iz)$ 是方程 (11) 的二个綫性独立解,但最常用的是下面的函数

(12) $$I_\nu(z)=e^{-i\frac{1}{2}\nu\pi}J_\nu(ze^{i\frac{1}{2}\pi})=\sum_{m=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2}z)^{2m+\nu}/[m!\Gamma(m+\nu+1)]$$
$$=\frac{(\tfrac{1}{2}z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_1(\nu+1;\ \tfrac{1}{4}z^2)$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}z)^{\nu}e^{-z}}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_1F_1(\nu+\tfrac{1}{2};\,2\nu+1;\,2z)$$
$$=2^{-2\nu-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}M_{0,\,\nu}(2z)/\Gamma(\nu+1),$$

[与 6-9(11) 比較]及 $I_{-\nu}(z)$. 这两函数称为第一类修正貝塞尔函数,当 ν 是实数、z 是正数时,它們都是实数.

函数

(13) $$K_{\nu}(z)=\tfrac{1}{2}\pi(\sin\nu\pi)^{-1}[I_{-\nu}(z)-I_{\nu}(z)]$$
$$=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}W_{0,\,\nu}(2z)$$

[与 6-9(14) 比較]也是 (11) 的一个解. 这一函数称为第三类修正貝塞尔函数或白塞特函数(虽然我們现在的定义是根据 MacDonald 的).

顯然我們有

(14) $$K_{-\nu}(z)=K_{\nu}(z),$$

而从 (12), (5) 及 (6) 可知

(15) $$K_{\nu}(z)=\tfrac{1}{2}i\pi e^{i\frac{1}{2}\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(ze^{i\frac{1}{2}\pi})$$
$$=-\tfrac{1}{2}i\pi e^{-i\frac{1}{2}\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(ze^{-i\frac{1}{2}\pi}),$$

因此有

(16) $$K_{\nu}(ze^{i\frac{1}{2}\pi})=\tfrac{1}{2}i\pi e^{i\frac{1}{2}\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(ze^{i\pi})=-\tfrac{1}{2}i\pi e^{-i\frac{1}{2}\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z),$$

(17) $$H_{\nu}^{(1)}(z)=-\frac{2i}{\pi}e^{-i\frac{1}{2}\nu\pi}K_{\nu}(ze^{-i\frac{1}{2}\pi}).$$

如 ν 为实数而 z 为正数,則 $K_{\nu}(z)$ 为实数.

7-2-3. 开尔芬函数及有关函数

开尔芬函数 ber (x) 及 bei (x) (x 实数)由下面的方程定义

(18) $$\operatorname{ber}(x)+i\operatorname{bei}(x)=J_0(xe^{i\frac{3}{4}\pi})=I_0(xe^{i\frac{1}{4}\pi}).$$

將这一定义推廣到复数 z 及任意階貝塞尔函数上的关系如下:

(19) $$\operatorname{ber}_{\nu}(z)\pm i\operatorname{bei}_{\nu}(z)=J_{\nu}(ze^{\pm i\frac{3}{4}\pi}),$$

(20) $$\operatorname{ker}_{\nu}(z)\pm i\operatorname{kei}_{\nu}(z)=e^{\mp i\frac{1}{2}\nu\pi}K_{\nu}(ze^{\pm i\frac{1}{4}\pi}).$$

如果不用 (20), 那么可用

(21) $\operatorname{her}_\nu(z)+i\operatorname{hei}_\nu(z)=H_\nu^{(1)}(ze^{i\frac{3}{4}\pi})$,

(22) $\operatorname{her}_\nu(z)-i\operatorname{hei}_\nu(z)=H_\nu^{(2)}(ze^{-i\frac{3}{4}\pi})$.

因此

(23) $2\operatorname{ker}_\nu(z)=-\pi\operatorname{hei}_\nu(z)$; $2\operatorname{kei}_\nu(z)=\pi\operatorname{her}_\nu(z)$,

当 ν 是实数且 z 是正实数的时候,函数 $\operatorname{ber}_\nu(z)$, $\operatorname{bei}_\nu(z)$, $\operatorname{ker}_\nu(z)$, $\operatorname{kei}_\nu(z)$, $\operatorname{her}_\nu(z)$, $\operatorname{hei}_\nu(z)$ 都是实数函数(詳見 McLachlan, 1934, p 119, 168).

7-2-4. 整数階的貝塞尔函数

整数階的第一类貝塞尔函数称为貝塞尔系数. 如 n 为一正整数,则在定义 $J_{-n}(z)$ 的無窮級数中,由于分母上的 γ 函数的極的关系,前 $n-1$ 項將消失. 其余的 γ 函数可寫成階乘式,因此有:

$$J_{-n}(z)=\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}z)^{2m-n}/[m!(m-n)!],$$

或者,以 $m=n+l$, $l=0, 1, 2, \cdots$

(24) $J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$.

这一关系对于所有整数的 n 都成立.

將 $\exp[\frac{1}{2}z(t-t^{-1})]$ 依 t 的冪展开,可得貝塞尔系数. 为了証明这一点,祇須注意

$$e^{\frac{1}{2}zt}e^{-\frac{1}{2}z/t}=\sum_{l=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2}zt)^l/l!\sum_{m=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{2}zt^{-1})^m/m!$$

在这一展开式中 t^n 的系数,恰巧是 $J_n(z)$. 于是可得母函数

$$\exp[\tfrac{1}{2}z(t-t^{-1})]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(z),$$

或者,以 az 代 z, t/a 代 t, 可得貝塞尔系数的更普遍的表达式

(25) $$\exp[\tfrac{1}{2}z(t-a^2t^{-1})]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(t/a)^nJ_n(az)$$

$$=J_0(az)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(az)[(t/a)^n+(-t/a)^{-n}].$$

以 $a=1,\ t=e^{i\phi}$，就可得雅可比-恩乔公式：

(26) $$e^{iz\sin\phi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\phi}J_n(z)$$

$$=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)\cos(2n\phi)$$

$$+2i\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(z)\sin[(2n-1)\phi],$$

如以 $t=ie^{i\phi}$，則

(27) $$e^{iz\cos\phi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^ne^{in\phi}J_n(z)$$

$$=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(z)\cos(n\phi).$$

如 ν 为整数，則 (4)，(5)，(6) 式的右边將变成不定形. 但是当 $\nu\to n$（整数）时，这些右边部分的極限还是存在的，因此可以把它作为整数階第二类及第三类貝塞尔函数的定义. 顯然，我們是足可以計算下面这一式的

$$Y_n(z)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(z)\qquad n=0,1,2,\cdots$$

在 (4) 中应用罗司比塔規則，可得

(28) $$Y_n(z)=\pi^{-1}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-n}}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}.$$

从(2)及1-7(1)

(29) $$\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}=J_\nu(z)\ln(\tfrac{1}{2}z)-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}z)^{\nu+2m}\frac{\psi(\nu+m+1)}{m!\Gamma(\nu+m+1)},$$

(30) $$\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}=-J_{-\nu}(z)\ln(\tfrac{1}{2}z)$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}z)^{\nu+2m}\frac{\psi(-\nu+m+1)}{m!\Gamma(-\nu+m+1)},$$

如 $m\leqslant n-1$，則由公式 1-17(11) 及 1-17(12) 可得

$$\lim_{\nu\to n}\psi(-\nu+m+1)/\Gamma(-\nu+m+1)=(-1)^{n-m}(n-m+1)!,$$

因此，由 (30) 及 (24)，得

$$\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}=(-1)^n\Bigg[-J_n(z)\ln(\tfrac{1}{2}z)$$
$$+\sum_{m=0}^{n-1}(\tfrac{1}{2}z)^{2m-n}(n-m+1)!/m!$$
$$+\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^{m-n}(\tfrac{1}{2}z)^{2m-n}\frac{\psi(m+1-n)}{\Gamma(m+1-n)m!}\Bigg].$$

〔在(29)中，对于特殊値的 ν 可参看 Mitra, 1925, Airey, 1935 a, 及 Müller, 1940〕. 取一个新的和式指标 $l=m-n$, 則上式中的無窮和可寫为

$$\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(\tfrac{1}{2}z)^{2l+n}\psi(l+1)/[l!(l+n)!],$$

因而得

$$\pi Y_n(z)=2J_n(z)\ln(\tfrac{1}{2}z)-\sum_{m=0}^{n-1}(\tfrac{1}{2}z)^{2m-n}(n-m-1)!/m!\tag{31}$$
$$-\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(\tfrac{1}{2}z)^{n+2l}\frac{\psi(n+l+1)+\psi(l+1)}{l!(n+l)!},$$
$$n=1,2,3,\cdots$$

这一式又可寫为

$$\pi Y_n(z)=2[\gamma+\ln(\tfrac{1}{2}z)]J_n(z)\tag{32}$$
$$-\sum_{m=0}^{n-1}(\tfrac{1}{2}z)^{2m-n}(n-m-1)!/m!$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}\left[(-1)^m\frac{(\tfrac{1}{2}z)^{n+2m}}{m!(n+m)!}(h_{m+n}+h_m)\right],\quad n=1,2,3,\cdots$$

其中我們应用了 1-7(9) 式，并令

$$h_m=1^{-1}+2^{-1}+\cdots+m^{-1},\qquad m=1,2,3,\cdots,h_0=0.$$

如 $\nu=0$, 則从 (30) 可知 (32) 中的有限和应該略去. 因此有

$$\pi Y_0(z)=2[\gamma+\ln(\tfrac{1}{2}z)]J_0(z)\tag{33}$$
$$-2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}z)^{2m}(m!)^{-2}h_m,$$

h_m 的意义和(32)式中的相同. 应該注意，根据(28),

$$(34)\quad Y_{-n}(z)=\lim_{\mu\to n}[\cos(\mu\pi)]^{-1}\left[\frac{J_\mu(z)\cos(\mu\pi)-J_{-\mu}(z)}{\sin(\mu\pi)}\right]$$
$$=(-1)^n Y_n(z)\qquad n=1,2,3,\cdots$$

用 $Y_n(z)$ 及 $Y_{-n}(z)$ 的这一定义,并用相应的第三类貝塞尔函数的定义,则所有貝塞尔函数都將是 ν 的整函数.

7-2-5. 整数階的修正貝塞尔函数

从 (24) 及 (12) 式有

$$(35)\quad I_{-n}(z)=I_n(z).\qquad n=1,2,3,\cdots$$

因此,我們就把 $I_n(z)$ 及 $K_n(z)$ 作为 (11) 的基本解組,此处

$$(36)\quad K_n(z)=\lim_{\nu\to n}K_\nu(z)=(-1)^n\tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial\nu}-\frac{\partial I_\nu}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}.$$

用 7-2-4 節中的同样方法,可得

$$(37)\quad K_n(z)=(-1)^{n+1}I_n(z)\ln(\tfrac{1}{2}z)$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m(\tfrac{1}{2}z)^{2m-n}\frac{(n-m+1)!}{m!}$$
$$+\tfrac{1}{2}(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2}z)^{n+2m}$$
$$\times[\psi(n+m+1)+\psi(m+1)]/[m!(n+m)!]$$
$$n=1,2,3,\cdots$$

如 $n=0$, 则

$$(38)\quad K_0(z)=-I_0(z)\ln(\tfrac{1}{2}z)+\sum_{m=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2}z)^{2m}\psi(m+1)/[(m!)^2].$$

应用这样完成的 $K_\nu(z)$ 的定义,就得一 ν 的整函数.

7-2-6. 球面貝塞尔函数

貝塞尔函数及修正貝塞尔函数在而且祇有在 ν 为整奇数的一半时才能轉化为初等函数組合 (Watson, 1944, 4-7 至 4-75). 現在我們將用初等函数來表示 $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$, 其中 $n=0,1,2,\cdots$. 其他

贝塞尔函数的相应表达式可根据 (16), (17), (7) 及 (8) 推出, 列在 7-11 節中. 当 $n=0, 1, 2, \cdots$ 及 $\nu=n+\frac{1}{2}$ 时, 从 7-3(16) 可得

$$(39)\quad K_{n+\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-z}}{n!}\int_0^\infty e^{-t}(1+t/2z)^n t^n dt.$$

今 $(1+\frac{1}{2}t/z)^n$ 的二項式展开式有尽, 因而立即可將 $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ 的表示式導成有限項形式

$$(40)\quad K_{n+\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-z}\sum_{m=0}^{n}(2z)^{-m}\frac{\Gamma(n+m+1)}{m!\,\Gamma(n+1-m)}.$$

应用亨克尔符号

$$(\nu, m)=\frac{2^{-2m}}{m!}\{(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)\cdots[4\nu^2-(2m-1)^2]\}$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}+\nu+m)/[m!\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+\nu-m)],$$

(与 1-20(3) 比較), 上式可寫为

$$(41)\quad K_{n+\frac{1}{2}}(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}e^{-z}\sum_{m=0}^{n}(n+\tfrac{1}{2}, m)(2z)^{-m}.$$

因此, 以 $n=0$ 为例, 则

$$(42)\quad K_{\frac{1}{2}}(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}e^{-z}.$$

从 (42) 及 7-11(22) 式可得表示式:

$$(43)\quad K_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}z^{n+1}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{e^{-z}}{z}.$$

别的类型的贝塞尔函数的情形, 見 7-11(1) 至 7-11(13) 各式.

階数为整奇数一半的贝塞尔函数常和球面波連帶出現, 这时松末费尔特記法是常被采用的, 他的記法如下:

$$(44)\quad \psi_m(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}J_{m+\frac{1}{2}}(z),$$

$$(45)\quad \zeta_m^{(1)}(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}H_{m+\frac{1}{2}}^{(1)}(z),$$

$$(46)\quad \zeta_m^{(2)}(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(z).$$

有时 $\psi_m(z)$ 所代表的是一个稍有不同的函数(見 Watson, 1944, 3.41). 与球面贝塞尔函数有关的多項式組, 可参看 Krall 及 Frink (1949) 与 Burchnall (1951) 的著作.

7-2-7. 貝塞尔函数的積

为了求得一个把二貝塞尔函数的積 $J_\mu(\alpha z)J_\nu(\beta z)$ 表示为 z 的升幂級数的表达式,我們可以应用公式(2)及柯西的幂級数乘法規則. 由此可得 $(-1)^m(\frac{1}{2}\alpha z)^\mu(\frac{1}{2}\beta z)^\nu(\frac{1}{2}\alpha z)^{2m}$ 的系数为

$$\sum_{n=0}^{m}(\beta/\alpha)^{2n}/[n!\Gamma(\nu+n+1)(m-n)!\Gamma(\mu+m-n+1)].$$

应用公式 1-2(3), 1-20(5) 及 2-1(2) 可將上式表示为一个有尽的超比級数,从而導出如下的展开式:

$$(47)\quad \Gamma(\nu+1)J_\nu(\beta z)J_\mu(\alpha z)=(\tfrac{1}{2}\alpha z)^\mu(\tfrac{1}{2}\beta z)^\nu \times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{1}{2}\alpha z)^{2m}}{m!\Gamma(\mu+m+1)}\,{}_2F_1(-m,-\mu-m;\nu+1;\beta^2\alpha^{-2}).$$

这一式当 $\beta=\alpha$ 时得到簡化,因为,在这种情况下的超比級数可用高斯公式 2-1(14) 求和,于是

$$(48)\quad J_\nu(z)J_\mu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{1}{2}z)^{\nu+\mu+2m}\Gamma(\nu+\mu+2m+1)}{m!\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(\nu+\mu+m+1)}.$$

用廣义超比級数的記法,則

$$(49)\quad \Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)J_\nu(z)J_\mu(z)=(\tfrac{1}{2}z)^{\nu+\mu}{}_2F_3(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu,1+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu;1+\nu,1+\mu,1+\nu+\mu;-z^2).$$

从(48)式就很容易導出下面的展开式

$$e^{\pm iz}J_\nu(z)=\pi^{-1/2}(2z)^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+n+\frac{1}{2})(\pm 2iz)^n}{n!\Gamma(2\nu+n+1)}.$$

7-2-8. 各种結果

微分公式及遞推关系如下. 从(2)式可得

$$(50)\quad \frac{d}{dz}[z^\nu J_\nu(z)]=z^\nu\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}z)^{2m+\nu-1}/[m!\Gamma(m+\nu)]=z^\nu J_{\nu-1}(z),$$

(51) $$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu}J_\nu(z)\right]$$

$$=z^{-\nu}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}z)^{2m+\nu-1}/\left[(m-1)!\Gamma(m+\nu+1)\right]$$

$$=-z^{-\nu}J_{\nu+1}(z),$$

因此，經繼續微分后可得

(52) $$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m\left[z^\nu J_\nu(z)\right]=z^{\nu-m}J_{\nu-m}(z),$$

(53) $$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m\left[z^{-\nu}J_\nu(z)\right]=(-1)^m z^{-\nu-m}J_{\nu+m}(z)$$

$$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

从 (50) 及 (51) 式顯然有

(54) $$zJ'_\nu(z)+\nu J_\nu(z)=zJ_{\nu-1}(z),$$

(55) $$zJ'_\nu(z)-\nu J_\nu(z)=-zJ_{\nu+1}(z).$$

因此有

(56) $$J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)=2\nu z^{-1}J_\nu(z),$$

(57) $$J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)=2J'_\nu(z).$$

根据 (4), (5) 及 (6) 可知，对于第二类及第三类貝塞尔函数也成立同样的关系. 关系式 (12), (13), 及前面的結果可給出修正貝塞尔函数的类似公式，这些公式見 7–11 節.

从遞推关系中可得下面的不等式 (Szász, 1950):

$$[J_\nu(x)]^2-J_{\nu-1}(x)J_{\nu+1}(x)>(\nu+1)^{-1}[J_\nu(x)]^2$$

$\nu>0$, x 实数.

隆司基行列式

方程(1)的二个解 w_1 及 w_2 的隆司基行列式是 $\exp\left[-\int z^{-1}dz\right]$ 的一个常数倍数，即

(58) $$W\{w_1,\ w_2\}\equiv w_1w'_2-w_2w'_1=Cz^{-1}.$$

常数 C 可以从解的級数展开式的首項中計算出來. 如令 $w_1=J_\nu(z)$, $w_2=J_{-\nu}(z)$, 則从級数 (2) 得

$$\lim_{z\to 0} zW = -(2\nu)/[\Gamma(1-\nu)\Gamma(1+\nu)] = -2\pi^{-1}\sin(\nu\pi) = C,$$

因此得

(59) $W[J_\nu, J_{-\nu}] = -2(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi)$.

如 ν 为一整数，則这一隆司基行列式等于零，这就証明了 7-2-4 節关于 J_n 及 J_{-n} 的綫性相关的結果. 对于貝塞尔函数或修正貝塞尔函数的其他隆司基式，見 7-11 節.

从 (59) 及 (54) 式可知

(60) $J_{-\nu+1}(z)J_\nu(z) + J_{-\nu}(z)J_{\nu-1}(z) = 2(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi)$.

其他类似公式見 7-11 節.

解析开拓

具有变量 $ze^{im\pi}$ (m 为任一整数)的第一类貝塞尔函数可用(2)式表示为:

(61) $J_\nu(ze^{im\pi}) = e^{im\pi\nu}J_\nu(z)$, $\qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

其他类貝塞尔函数的相应关系，見 7-11 節.

微分方程

隆美耳曾得出了很多微分方程，它們的解都可以用貝塞尔函数來表示. 隆美耳变換之一是

$$z = \beta\zeta^\gamma, \quad w = \zeta^{-\alpha}v,$$

其中 ζ 为自变量而 v 为新的因变量. 这一变换將 (1) 式变換为

(62) $\zeta^2\dfrac{d^2v}{d\zeta^2} + (1-2\alpha)\zeta\dfrac{dv}{d\zeta} + [(\beta\gamma\zeta^\gamma)^2 + (\alpha^2-\nu^2\gamma^2)]v = 0.$

設 $w_1(z)$ 及 $w_2(z)$ 为貝塞尔方程的任意二个綫性独立解，則 (62) 的通解为

(63) $v_1 = \zeta^\alpha w_1(\beta\zeta^\gamma)$ 及 $v_2 = \zeta^\alpha w_2(\beta\zeta^\gamma)$.

解可用貝塞尔函数來表示的其他微分方程，参看 Kamke (1948, p. 440).

非齐次貝塞尔方程

(64) $z^2\dfrac{d^2w}{dz^2} + z\dfrac{dw}{dz} + (z^2-\nu^2)w = f(z)$

的通解可用参数变值法來求得，其形为

(65) $w=Aw_1(z)+Bw_2(z)+u(z)$,

其中 $w_1(z)$ 及 $w_2(z)$ 为齐次方程 (1) 的二个綫性独立解，$u(z)$ 为 (64) 的一个特解，由下式定义

(66) $$Cu(z)=-w_1(z)\int_{z_0}^{z}t^{-1}w_2(t)f(t)dt+w_2(z)\int_{z_0}^{z}t^{-1}w_1(t)f(t)dt$$

C 是 w_1 及 w_2 的隆司基行列式中的常数[見 (58)].

函数 $J'_\nu(z)$ 及 $azJ'_\nu(z)+bJ_\nu(z)$ 分别满足下面的微分方程：

(67) $$z^2(z^2-\nu^2)\frac{d^2w}{dz^2}+z(z^2-3\nu^2)\frac{dw}{dz}+[(z^2-\nu^2)^2-(z^2+\nu^2)]w=0.$$

(68) $$z^2[a^2(z^2-\nu^2)+b^2]\frac{d^2w}{dz^2}-z[a^2(z^2+\nu^2)-b^2]\frac{dw}{dz}+[a^2(z^2-\nu^2)^2+2abz^2+b^2(z^2-\nu^2)]w=0.$$

7-3. 積分表示式

7-3-1. 貝塞尔系数

如果將柯西的留数定理应用于 7-2(25)，則

(1) $$2\pi iJ_n(az)=a^n\int_C t^{-n-1}\exp[½z(t-a^2t^{-1})]dt$$

$$n=0,1,2,\cdots$$

C 是 t 平面內圍繞原点的任一單閉圍道．如在 (1) 中令 $a=1$，并选定 C 为圍繞原点的單位圓，$t=e^{i\phi}$，則

(2) $$2\pi J_n(z)=\int_0^{2\pi}e^{i(z\sin\phi-n\phi)}d\phi=2\int_0^{\pi}\cos(z\sin\phi-n\phi)d\phi,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

这就是貝塞尔表示式．

7-3-2. 泊松型的積分表示式

对于一般的 ν, 泊松積分表示式为[这一公式的推廣見 7-8(11)]:

(3) $$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})J_\nu(z)=2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(z\sin\phi)(\cos\phi)^{2\nu}d\phi$$

$$\operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2}.$$

要証明这一公式, 可將 $\cos(z\sin\phi)$ 展开为 z 的冪級数而后逐項積分卽得. 在这一过程中, 將会遇到積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\phi)^{2m}(\cos\phi)^{2\nu}d\phi.$$

根据 1-5(19), 这一積分等于

$$\tfrac{1}{2}\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\Gamma(m+\tfrac{1}{2})/\Gamma(m+\nu+1),$$

因此, 得

$$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})J_\nu(z)$$
$$=\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^{2m}\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}{(2m)!\Gamma(\nu+m+1)}.$$

对 $2m!=\Gamma(2m+1)$ 应用 γ 函数中的加倍公式 1-2(15) 并記住公式 7-2(2), 就可得出公式 (3). (3) 式的稍加修正式, 見 7-12 節.

7-12(6) 式的泊松積分可用以導出一个 $J_\nu(z)$ 的不等式. 設 ν 为实数, $\nu>-\frac{1}{2}$, 且 $z=x+iy$ (x, y 实数), 則

$$\Gamma(\nu+1)|J_\nu(z)|\leqslant\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}|z|)^\nu\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}e^{|y|}(\cos\phi)^{2\nu}d\phi$$

而根据 1-5(19), 可得

(4) $$|J_\nu(z)|\leqslant|\tfrac{1}{2}z|^\nu e^{|y|}/\Gamma(\nu+1),$$

[还可参看 7-10(22)].

7-3-3. 回綫積分表示式

ν 階(数值不限制)贝塞尔函数可以表示为回綫積分. 設 α 为

一复数而 $\operatorname{Re}\alpha>0$; 則可有表示式:

(5) $$2\pi i J_\nu(\alpha z)=z^\nu\int_{-\infty}^{(0+)}\exp\left[\tfrac{1}{2}\alpha(t-z^2t^{-1})\right]t^{-\nu-1}\,dt$$

$$=(z/2)^\nu\int_{-\infty}^{(0+)}\exp\left[\alpha(t-\tfrac{1}{4}z^2t^{-1})\right]t^{-\nu-1}\,dt,$$

$$\operatorname{Re}\alpha>0,\quad |\arg t|\leqslant\pi.$$

此处符号 $\int_{-\infty}^{(0+)}$，像平常一样,表示一个圍綫積分,積分圍道由負实 t 軸上的無窮远点开始,以逆时針方向圍繞原点而后回至起点. 很明顯, (5) 式是 (1) 式的推廣, 因为如 ν 为一整数, 則 (5) 式的被積式是單值的, 積分回綫可以变形为一个圍繞原点的閉圍綫. 为了証明 (5) 式,在 (5) 式中应用展开式

$$\exp\left[-\alpha z^2/(4t)\right]=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{4}\alpha z^2)^m t^{-m}/m!$$

幷逐項積分. 从 1-6(6) 式得

$$\int_{-\infty}^{(0+)}e^{\alpha t}t^{-m-\nu-1}\,dt=2\pi i\alpha^{m+\nu}/\Gamma(m+\nu+1).$$

因此有

$$\int_{-\infty}^{(0+)}\exp\left[\alpha t-\tfrac{1}{4}\alpha z^2t^{-1}\right]t^{-\nu-1}\,dt$$

$$=2\pi i(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}\alpha z)^{2m+\nu}/[m!\,\Gamma(m+\nu+1)],$$

应用 7-2(2) 就可得出 (5) 式.

其他类型貝塞尔函数的相应回綫積分,可以应用公式 7-2(4) 至 7-2(6) 及 7-2(12), 7-2(13) 式得出. 可参看 McLachlan 及 Meyers (1937).

当 $\operatorname{Re}\nu>-1$ 而 α 为正实数时, (5) 中的圍道可以变形为一平行于虛軸的直綫,于是

(6) $$2\pi i J_\nu(\alpha z)=z^\nu\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{\frac{1}{2}\alpha(t-z^2t^{-1})}t^{-\nu-1}\,dt,$$

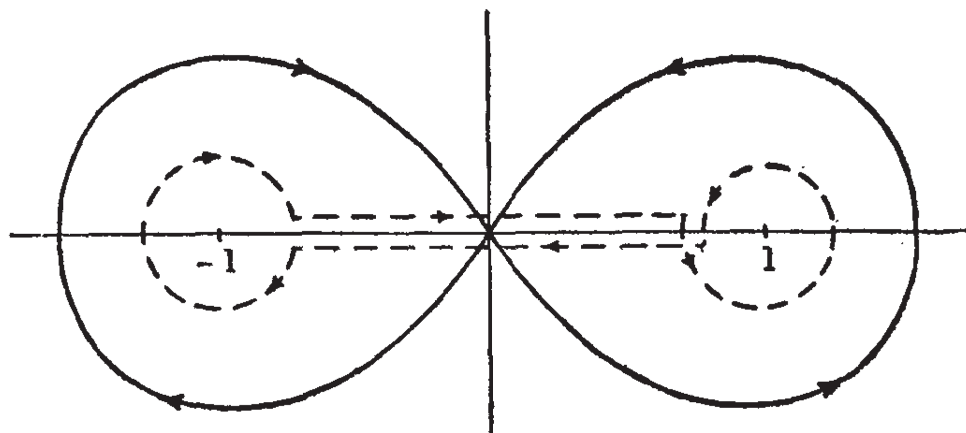
$$c,\ \alpha>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1.$$

亨克尔表示式

泊松積分 (3) 的推廣式曾由亨克尔導出．其中的第一个就是

(7) $$2\pi i J_\nu(z)=\pi^{-1/2}\Gamma(1/2-\nu)(1/2 z)^\nu\int^{(1+,-1-)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}dt,$$

$\nu+1/2$ 不为負整数．積分路徑为一 8 字形，如下圖所示．



t-平面

$(t-1)$ 及 $(t+1)$ 在与正实軸交点上的最初幅角在 $t=1$ 右边者等于零．为了証明式(7)，我們可將原來的圍道用圖中虛綫所示的圍綫來代替．如設 $\mathrm{Re}(\nu+1/2)>0$，并使圍繞 ±1 的圓半徑趋向于零，則可得

$$\int^{(1+,-1-)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}dt=2i\cos(\nu\pi)\int_{-1}^{1}e^{izt}(1-t^2)^{\nu-1/2}dt,$$

$$\mathrm{Re}\,\nu>-1/2.$$

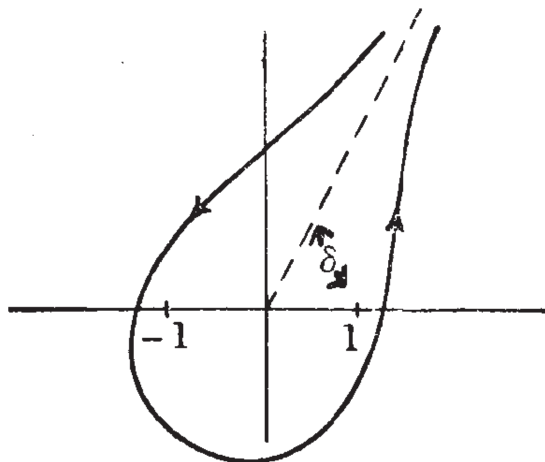
如將右边的積分用 7-12(7) 式表示，就可得出 (7) 式．根据解析开拓的理論，衹要 $\nu+1/2$ 不为正整数，限制条件 $\mathrm{Re}\,\nu>-1/2$ 是可以省略掉的．

另一表示式为[有关表达式見 7-8(13)]

(8) $$2\pi i J_\nu(z)=\pi^{-1/2}\Gamma(1/2+\nu)e^{i3\nu\pi}(1/2 z)^{-\nu}\times\int_{\infty e^{i\delta}}^{(-1+,1+)}e^{izt}(t^2-1)^{-\nu-1/2}dt$$

$\nu+1/2\neq0,\ -1,\ -2,\cdots,\ \delta\leqslant\arg t\leqslant2\pi+\delta,\ -\delta<\arg z<\pi-\delta.$

積分路徑如下圖所示:



t 平面

$\arg t$ 的最初值取 δ, 最終值取 $\delta+2\pi$. 为了証明式 (8), 可令圍道位于單位圓的外面. 則

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+\nu)(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma(\tfrac{1}{2}+\nu+m)t^{-2\nu-2m-1}/m!$$

將这一式代入 (8) 并逐項積分. 于是从 1-6(6) 式令 $\zeta=ze^{-i\frac{1}{2}\pi}$, 得

$$\int_{\infty e^{i\delta}}^{(0+)} t^{-2\nu-2m-1}e^{izt}\,dt=2\pi i z^{2\nu+2m}e^{-i3\pi(\nu+m)}/\Gamma(2\nu+2m+1)$$
$$-\delta<\arg z<\pi-\delta.$$

因此

$$J_\nu(z)=\pi^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}z)^{\nu+2m}\frac{2^{2m+2\nu}\Gamma(\tfrac{1}{2}+\nu+m)}{m!\,\Gamma(2m+2\nu+1)}.$$

对 γ 函数应用 1-2(15) 的加倍公式, 即可建立出公式 (8).

7-3-4. 許拉弗里, 古勃勒, 沙湟及有关積分表示式

从 7-3-3 的結果中可得出很多定積分型的表示式.

許拉弗里表示式

在 (5) 中, 將 α 与 z 对調, 令 $\alpha=1$, 并將回綫变形为一个由如下部分組成的路徑: $-\infty$ 至 -1 的实軸 $(\arg t=-\pi)$, 在正方向内圍繞原点的單位圓 $(-\pi\leqslant\arg t\leqslant\pi)$, 及 -1 至 $-\infty$ 的实軸 $(\arg t=\pi)$. 結果即得許拉弗里表示式:

(9) $$\pi J_\nu(z)=\int_0^\pi \cos(z\sin\phi-\nu\phi)\,d\phi-\sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-(z\,\mathrm{sh}\,\beta+\nu\beta)}\,d\beta$$
$$\mathrm{Re}\,z>0.$$

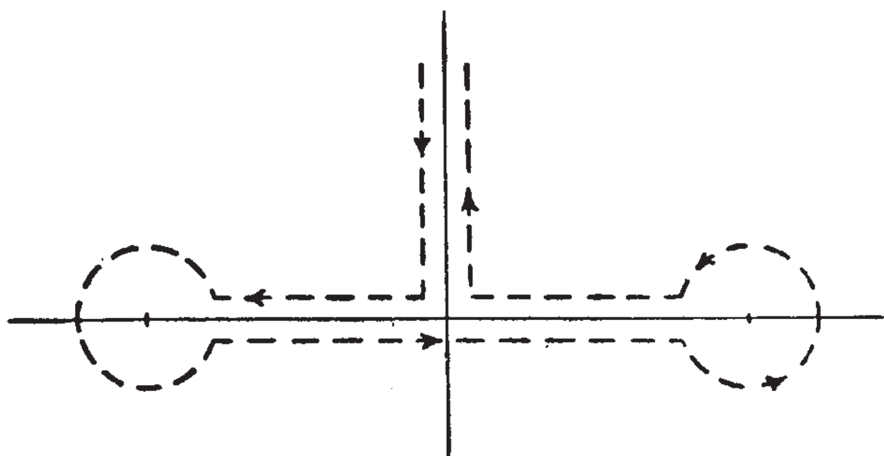
如 $\mathrm{Re}\,z=0$，則祇要 $\mathrm{Re}\,\nu>0$，上式仍正确．如 ν 为一整数，則(9)式即簡化为式(2)．又 7-2(4) 及 (9) 还为紐孟函数建立了一个类似表达式，

(10) $$\pi Y_\nu(z)=\int_0^\pi \sin\,(z\sin t-\nu t)\,dt-\int_0^\infty (e^{\nu t}+e^{-\nu t}\cos\nu\pi)e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt, \qquad \mathrm{Re}\,z>0.$$

[对于 (9) 及 (10) 式中右边的第一个積分，可与 7-5(32) 式比較]．(9) 及 (10) 式的廣义式，見 7-12(17) 及 7-12(18)．

古勃勒表示式

从(8)式中，將積分圍道特殊化一下可为 $J_\nu(z)$ 導出另一表示式．我們取 $\delta=\frac{1}{2}\pi$，并將圍道变形为圖中的虛綫路徑．如 $\mathrm{Re}\,\nu<\frac{1}{2}$，圍繞 ±1 的圓半徑趋向于零，則得



t-平面

(11) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)J_\nu(z)=2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}\Big[\int_0^1(1-t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}\cos(zt-\nu\pi)\,dt-\sin\,(\nu\pi)\int_0^\infty(1+t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}e^{-zt}\,dt\Big], \quad \mathrm{Re}\,z>0,\ \mathrm{Re}\,\nu<\tfrac{1}{2}.$$

这一式相当于泊松積分式 (3)．在(12)式中，如以 $-\nu$ 代 ν 并結合 (3) 及 7-2(4)，則紐孟函数的相应表达式为

(12) $$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\,Y_\nu(z)=2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\Big[\int_0^1(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(zt)\,dt$$

$$-\int_0^\infty e^{-zt}(1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt\Big],\qquad \operatorname{Re}z>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2}.$$

在(12)式中，引入斯特拉夫函数 7-5(78)，得

(13) $$[\boldsymbol{H}_\nu(z)-Y_\nu(z)]\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})$$

$$=2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_0^\infty e^{-zt}(1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt,\qquad \operatorname{Re}z>0.$$

現在(8)式中令$\delta=0$，并取虚綫的積分路徑．以$ze^{i\frac{1}{2}\pi}$代z，$-\nu$代ν，并設$\operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2}$，借以使圍繞$t=\pm1$的刻鑿半徑趋于零，則得

(14) $$I_{-\nu}(z)=\pi^{-\frac{3}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)(\tfrac{1}{2}z)^\nu\Big[\sin(2\nu\pi)\int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$+\cos(\nu\pi)\int_{-1}^1 e^{zt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt\Big],\quad \operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2},\ \operatorname{Re}z>0.$$

因此，根据公式 7-2(13)，7-2(12)，7-2(14) 可得

(15) $$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})K_\nu(z)=\pi^{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2},\ \operatorname{Re}z>0.$$

以$t-1=v/z$，則得

(16) $$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})K_\nu(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}e^{-z}\int_0^\infty e^{-v}v^{\nu-\frac{1}{2}}(1+\tfrac{1}{2}v/z)^{\nu-\frac{1}{2}}dv$$

$$|\arg z|<\pi,\ \operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2},$$

或者，更普遍的为

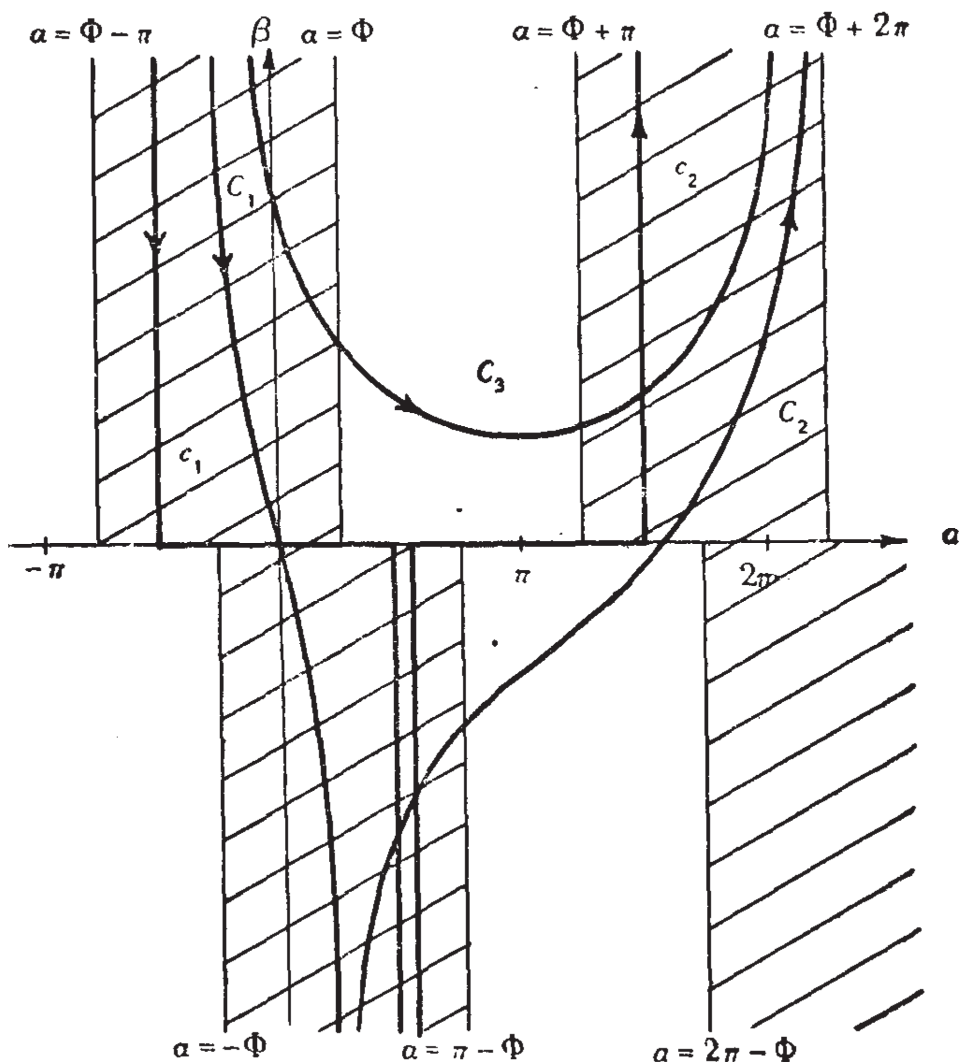
(17) $$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})K_\nu(z)$$

$$=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}e^{-z}\int_0^{\infty e^{i\delta}}e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}(1+\tfrac{1}{2}t/z)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2},\ |\delta|<\tfrac{1}{2}\pi,\ \delta-\pi<\arg z<\delta+\pi.$$

7-3-5. 松牟費尔特積分式

如將積分$\int e^{iz\cos\tau}e^{i\nu(\tau-\frac{1}{2}\pi)}d\tau$沿着直綫圍道$c_1$(由$-\tfrac{1}{2}\pi+i\infty$至$\tfrac{1}{2}\pi-i\infty$)及$c_2$(由$\tfrac{1}{2}\pi-i\infty$至$\tfrac{3}{2}\pi+i\infty$)(見圖)進行計



値，則由 (9)，(10)，7-2(5) 及 7-2(6) 得

(18) $\pi H_\nu^{(1)}(z)=\int_{c_1} e^{iz\cos\tau}e^{i\nu(\tau-\frac{1}{2}\pi)}\,d\tau,$

(19) $\pi H_\nu^{(2)}(z)=\int_{c_2} e^{iz\cos\tau}\,e^{i\nu(\tau-\frac{1}{2}\pi)}\,d\tau.$

对于 $\operatorname{Re} z>0$，二个積分均收斂．閉道 c_1 可用 C_1 來代替，C_1 由 $-\eta+i\infty$ 至 $\eta-i\infty$，此处 η 为 0 与 π 間的一个適当数．用記法

$$\Phi=\arg z,\quad \alpha=\operatorname{Re}\tau,\quad \beta=\operatorname{Im}\tau,\quad \tau=\alpha+i\beta,$$

就很容易証明 $\operatorname{Re}(iz\cos\beta)$ 在 β 較大时可用

$$-|z|\operatorname{ch}\beta\sin(\Phi\mp\alpha)$$

來漸近地表示．上面及下面的符号随 $\beta\gtrless 0$ 而定．因此，(18)式的被積式在 τ 平面陰影部分中当 $\tau\to\infty$ 时按指数形式趋于零．祇要

$-\eta<\Phi<\frac{1}{2}\pi$ 或 $-\frac{1}{2}\pi<\Phi<\pi-\eta$（根据 $0<\eta<\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{1}{2}\pi<\eta<\pi$ 而定），我們都可以 C_1 代 c_1. 这样就有

$$(20)\quad \pi H_\nu^{(1)}(z)=\int_{C_1} e^{iz\cos\tau} e^{i\nu(\tau-\frac{1}{2}\pi)}\,d\tau,$$

同理

$$(21)\quad \pi H_\nu^{(2)}(z)=\int_{C_2} e^{iz\cos\tau} e^{i\nu(\tau-\frac{1}{2}\pi)}\,d\tau,$$

C_2 是由 $\eta-i\infty$ 至 $2\pi-\eta+i\infty$ 的圍道. 这些積分在

$$(22)\quad -\eta<\Phi=\arg z<\pi-\eta,\ 0\leqslant\eta\leqslant\pi$$

时收斂，根据解析开拓理論可知这就是(20)及(21)式的有效范圍.

根据这些結果，从 7-2(7) 可知

$$(23)\quad 2\pi J_\nu(z)=\int_{C_3} e^{iz\cos\tau} e^{i\nu(\tau-\frac{1}{2}\pi)}\,d\tau,$$
$$-\eta<\arg z<\pi-\eta,\ 0\leqslant\eta\leqslant\pi,$$

C_3 是由 $-\eta+i\infty$ 至 $2\pi-\eta+i\infty$ 的圍道.

常常要用到下面一些圍綫積分

$$(24)\quad \pi H_\nu^{(1)}(z)=-i\int_{-\infty}^{\infty+i\pi} e^{z\,\mathrm{sh}\,\alpha-\nu\alpha}\,d\alpha,$$

$$(25)\quad \pi H_\nu^{(2)}(z)=i\int_{-\infty}^{\infty-i\pi} e^{z\,\mathrm{sh}\,\alpha-\nu\alpha}\,d\alpha,$$

$$(26)\quad 2\pi J_\nu(z)=-i\int_{\infty-i\pi}^{\infty+i\pi} e^{z\,\mathrm{sh}\,\alpha-\nu\alpha}\,d\alpha,$$

这些積分式当 $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$ 时有效. 它們可以分别从(20), (21)及(23)式中令 $\eta=\frac{1}{2}\pi$, 并引用代換 $\tau=\frac{1}{2}\pi+i\alpha$ 來導出.

特殊情形

选取 $\eta=0$, 并設圍道 C_1 及 C_2 是直綫的，于是可得希英表达式

$$(27)\quad \pi H_\nu^{(1)}(z)=-ie^{-i\frac{1}{2}\pi\nu}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\,\mathrm{ch}\,t} e^{-\nu t}\,dt,\qquad 0<\arg z<\pi,$$

$$(28)\quad \pi H_\nu^{(2)}(z)=2ie^{i\frac{1}{2}\nu\pi}\Big[\int_0^\infty e^{iz\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{ch}\,(\nu t-i\nu\pi)\,dt$$
$$-i\int_0^\pi e^{-iz\cos t}\cos(\nu t)\,dt\Big],\qquad 0<\arg z<\pi.$$

如取 $\eta=\pi$，幷設 C_1 及 C_2 是直綫的，則得

$$(29)\quad \pi H_\nu^{(1)}(z)=-2ie^{-i\frac{1}{2}\nu\pi}\left[\int_0^\infty e^{-iz\operatorname{ch}t}\operatorname{ch}(\nu t+i\nu\pi)\,dt\right.$$
$$\left.+i\int_0^\pi e^{iz\cos t}\cos(\nu t)dt\right],\qquad -\pi<\arg z<0,$$

$$(30)\quad \pi H_\nu^{(2)}(z)=ie^{i\frac{1}{2}\nu\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-iz\operatorname{ch}t}e^{-\nu t}\,dt,\qquad -\pi<\arg z<0.$$

从 (27) 至 (30) 式，应用 7-2(7) 式分别可得

$$(31)\quad \pi J_\nu(z)=e^{i\frac{1}{2}\nu\pi}\left[\int_0^\pi e^{-iz\cos t}\cos(\nu t)dt\right.$$
$$\left.-\sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-\nu t+iz\operatorname{ch}t}dt\right],\qquad 0<\arg z<\pi,$$

$$(32)\quad \pi J_\nu(z)=e^{-i\frac{1}{2}\nu\pi}\left[\int_0^\pi e^{iz\cos t}\cos(\nu t)dt\right.$$
$$\left.-\sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-\nu t-iz\operatorname{ch}t}dt\right],\qquad -\pi<\arg z<0.$$

在 (27) 中，令 $e^t=v/\alpha$；則得

$$(33)\quad \pi H_\nu^{(1)}(\alpha z)=-ie^{-i\frac{1}{2}\nu\pi}\alpha^\nu\int_0^\infty e^{i\frac{1}{2}z(v+\alpha^2/v)}v^{-\nu-1}dv,$$
$$\operatorname{Im} z>0,\ \operatorname{Im}(\alpha^2 z)>0.$$

7-3-6. 巴尼斯積分式

第一类貝塞尔函数表示为米林-巴尼斯積分 [見 (1-19)] 的表示式为

$$(34)\quad 4\pi iJ_\nu(x)=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\tfrac{1}{2}x)^{-s}\Gamma(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}s)/\Gamma(1+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}s)ds$$
$$x>0,\ -\operatorname{Re}\nu<c<1,$$

这一式可將積分計值为被積式的留数或应用米林反演公式于 7-7(19) 而得到証明.

如果限制条件 $-\operatorname{Re}\nu<c<1$ 被撤銷，則積分仍有意义，但就不一定再表示貝塞尔函数. 令

(35) $$4\pi i J_{\nu,m}(x)=\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(\tfrac{1}{2}x)^{-s}\Gamma(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}s)/\Gamma(1+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}s)ds$$

$$x>0,\ \sigma<1,\ -2m-\mathrm{Re}\,\nu<\sigma<-(2m-1)-\mathrm{Re}\,\nu,\ m=1,2,\cdots$$

積分是沿着一条平行于虚軸的直綫進行的．將積分計值为被積式的留数时有

$$4\pi J_{\nu,m}(x)=4\pi J_\nu(x)-4\pi i\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\frac{(\tfrac{1}{2}x)^{\nu+2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}.$$

对于 z 及 ν 的任意复数值，我們定义

(36) $$J_{\nu,m}(z)=\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n(\tfrac{1}{2}z)^{\nu+2n}/[n!\Gamma(\nu+n+1)],$$

$$m=1,2,3,\cdots$$

我們称这一函数为第一类剖割上的貝塞尔函数．从(33)式有

(37) $$\frac{d}{dz}[z^\nu J_{\nu,m}(z)]=z^\nu J_{\nu-1,m}(z),$$

(38) $$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}J_{\nu,m}(z)]=-z^{-\nu}J_{\nu+1,m}(z).$$

7-3-7. 爱里積分式

下面是爱里積分式

(39) $$\int_0^\infty\cos(t^3+3tx)dt=(x/3)^{\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{3}}(2x^{\frac{3}{2}}),\qquad x>0,$$

(40) $$\int_0^\infty\cos(t^3-3tx)dt=-\pi/3x^{\frac{1}{2}}[J_{\frac{1}{3}}(2x^{\frac{3}{2}})+J_{-\frac{1}{3}}(2x^{\frac{3}{2}})],$$

$$x>0,$$

这些公式可証明如下．在(39)中作代换 $t=2x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sh}\,\tfrac{1}{3}v$．因为

$$4(\mathrm{sh}\,v/3)^3+3\,\mathrm{sh}\,(v/3)=\mathrm{sh}\,v.$$

故得

$$\int_0^\infty\cos(t^3+3tx)dt=2x^{\frac{1}{2}}/3\int_0^\infty\cos(2x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sh}\,v)\,\mathrm{ch}\,(v/3)\,dv,$$

再应用 7-12(25) 就可得出 (39).

要証明 (40)，可將 (39) 式的右边部分用其冪級数[見 7-2(12)

及 7-2(13)] 來表示,得

$$\int_0^\infty \cos\,(t^3+3tx)\,dt$$

$$=\tfrac{1}{3}\pi\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{3m}}{m!\Gamma(-\tfrac{1}{3}+m+1)}-x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{3m}}{\Gamma(\tfrac{1}{3}+m+1)m!}\right].$$

这里可用 $-x$ 代 x 并应用 7-2(2) 就可得 (40). 公式 (39) 及(40) 的推廣見華特生 (1944, pp. 320–324).

7-4. 漸近展开式

貝塞尔函数的漸近性态随它的階 ν 或变数 z 或 ν 及 z 的無限增加而不同. 当 z 固定而 $\nu\to\infty$ 时, 7-2(2) 的冪級数展开式即是漸近展开式. 当 ν 固定而 $z\to\infty$ 时,漸近展开式也比較容易導出; 但当 ν 及 z 都大的情况下,研究就比較复什了.

7-4-1. 大的变数

我們在这里將導出第三类修正貝塞尔函数 $K_\nu(z)$ 的漸近展开式. 其他貝塞尔函数的对应展开式可用公式 7-2(16), 7-2(17), 及 7-2(8) 來求;其結果可參看 7-13-1 節.

我們从積分表示式 7-3(17) 着手,

$$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})K_\nu(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}e^{-z}$$

$$\times\int_0^{\infty e^{i\delta}}e^{-t}\,t^{\nu-\frac{1}{2}}\,(1+\tfrac{1}{2}t/z)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt,$$

$$\operatorname{Re}\nu>\tfrac{1}{2},\ |\delta|<\tfrac{1}{2}\pi,\ \delta-\pi<\arg z<\delta+\pi,$$

將具有余項的二項式展开式

$$(1+\tfrac{1}{2}t/z)^{\nu-\frac{1}{2}}=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})}{m!\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}-m)}(\tfrac{1}{2}t/z)^m+r_M$$

代入,并应用 1-1(6), 可得

$$(1)\qquad K_\nu(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}e^{-z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}+m)}{m!\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}-m)}(2z)^{-m}+R_M\right],$$

$$-3\pi/2<\arg z<3\pi/2,$$

式中的余項由下式給出

$$(2)\qquad (M-1)!\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}-M)R_M$$
$$=(2z)^{-M}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}+M}dt\int_0^1(1-v)^{M-1}(1+\tfrac{1}{2}vt/z)^{\nu-\frac{1}{2}-M}dv.$$

容易看出对于任何固定的 ν，当 $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$ 时，有

$$R_M=O(|z|^{-M}),\ z\to\infty,\ -3\pi/2+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant3\pi/2-\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

仔細一点討論一下式 (2) 可知，如 ν 为实数，$M>\nu-\frac{1}{2}>-1$，$\mathrm{Re}\,z>0$，則 (1) 式中余項的模將小于第一略去項 $(m=M)$ 的模（見 MacRobert 1947, p. 272; Watson, 1944, p. 207），而当 ν 及 z 都是实数，$2z-M+\frac{1}{2}$ 与 z 相比为很小时，余項將近似地等于第一略去項的一半（見 Burnett, 1929）. 愛萊（見 1937）將 (1) 作了修正，因此得出了一个適用于精确度較高的数值計算的更好近似式.

引用亨克尔符号 1-20(3)

$$(3)\qquad (\nu,m)=\frac{2^{-2m}}{m!}\{(4\nu^2-1^2)\cdots[4\nu^2-(2m-1)^2]\}$$
$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu+m)}{m!\Gamma(\frac{1}{2}+\nu-m)},$$

漸近展开式可寫为

$$(4)\qquad K_\nu(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}e^{-z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu,m)(2z)^{-m}+O(|z|^{-M})\right],$$
$$-3\pi/2<\arg z<3\pi/2.$$

由于在 (ν,m) 的定义中祇出現有 ν^2，故限制条件 $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$ 可以省去.

7-4-2 大的階

具有大的变数及大的階的貝塞尔函数的第一个可靠研究系由第拜 (1909) 所提出，他用的是最陡下降法. 这个方法以下面的研究为根据（見 Copson, 1935, p. 330; Watson, 1944, p. 235).

設一函数 $F(z)$ 的形式为

$$(5)\qquad F(z)=\int_C e^{-zf(\alpha)}\,g(\alpha)\,d\alpha.$$

其中 C 为复 α-平面上联接 $e^{-zf(\alpha)}$ 的二个零点的圍道. 在很多情形下常可以这样來选擇 C, 使其通过 $f'(\alpha)$ 的一个零点 α_0, 并使 $f(\alpha)$ 的虚部在 C 上保持常数. 这样就可有 $f'(\alpha_0)=0$, 且沿着 C 有

$$(6)\qquad \mathrm{Im}\,[f(\alpha)]=\text{常数}=\mathrm{Im}\,[f(\alpha_0)],$$

因此当 α 通过 C 时, $\mathrm{Re}\,[f(z)]$ 很快地变化. 对于大的 z, 被積式的模在 α_0 上具有一个突出的最大值,衹有 α_0 的緊接鄰域内的那一部分 C 才对圍綫積分 (5) 起重要的作用.

为了簡單起見,我們假設階及变数都是正的,并令

$$(7)\qquad z=x>0,\quad \nu=p>0.$$

此外,并設 $p,x\to\infty$ 时由下式定义的量 v_0

$$(8)\qquad \mathrm{sh}\,v_0=p/x,\ \mathrm{ch}\,v_0=(1+p^2/x^2)^{1/2},\ v_0>0$$

是固定的. 我們在这里衹討論 $K_p(x)$; 其他貝塞尔函数的对应展开式列于 7–13–2 節中.

一个形如 (5) 式的 $K_p(x)$ 的積分表示式立即可从 7–2(15) 式及松卓費尔特式 7–3(20) 中得出,其形式为

$$(9)\qquad K_p(x)=\tfrac{1}{2}i\int_C e^{-x\cos\alpha}\,e^{ip\alpha}\,d\alpha=\tfrac{1}{2}i\int_C e^{-xf(\alpha)}\,d\alpha$$

式中

$$(10)\qquad f(\alpha)=\cos\alpha-ip\alpha/x.$$

根据 7–3–5 節中的結果, 圍道 C 从 $-\eta+i\infty$ 开始, 終于 $\eta-i\infty$, 此处 $0\leqslant\eta\leqslant\pi$, 并整个位于复 α-平面的帶 $-\eta\leqslant\mathrm{Re}\,\alpha\leqslant\eta$ 内. 条件 $f'(\alpha)=0$ 引出了

$$(11)\qquad \sin\alpha=-ip/x=-i\,\mathrm{sh}\,v_0,$$

这一方程具有無窮数个解

$$(12)\qquad \alpha_m=-iv_0+2\pi m,\qquad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

从此可知祇有 α_0 位于帶 $-\eta<\operatorname{Re}\alpha<\eta$ 內. 因此

(13) $\alpha_0=-i\ln\{x^{-1}[p+(p^2+x^2)^{1/2}]\}=-iv_0,$

由 (10) 得

(14) $f(\alpha_0)=\operatorname{ch}v_0-v_0\operatorname{sh}v_0.$

条件 (6) 表明最陡下降的路徑是虛軸, 而从 (9) 式, 取 $\alpha=iv$, 則

(15) $K_p(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x\operatorname{ch}v+pv}\,dv=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-xg(v)}\,dv,$

式中

$$g(v)=\operatorname{ch}v-v\operatorname{sh}v_0.$$

置換

(16) $\tau=g(v)-g(v_0)=\operatorname{ch}v-\operatorname{ch}v_0-(v-v_0)\operatorname{sh}v_0$

將 v 平面映到 τ-平面上, 除了在点 $v_m=v_0+2\pi im$ (在这些点上 $d\tau/dv$ 具有單根) 之外, 映射都是保形的. 因此在 $\tau=0$ 的鄰域內

(17) $\Phi(\tau)=dv/d\tau=[g'(v)]^{-1}$

可以表示为

(18) $\Phi(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\tau^{\frac{1}{2}n-1},$

这一展开式到次一奇点 τ (对应于 $v=v_0\pm2\pi i$) 之前都是收斂的.

当 v 由 $-\infty$ 增加到 v_0 时, 变数 τ 由 ∞ 減小至 0; 而当 v 繼續由 v_0 增加至 ∞ 时, 变数 τ 由 0 增加至 ∞. 我們將依下面的条件來确定(18)中的系数 b_n, 卽在積分路徑的前面部分上可取 $\arg\tau=2\pi$ 而在后一部分上取 $\arg\tau=0$. 于是有

(19) $K_p(x)=\frac{1}{2}e^{-xf(v_0)}\int_0^{\infty}e^{-\tau x}[\Phi(\tau)-\Phi(\tau e^{i2\pi})]\,d\tau.$

此处我們应用(18)并利用華特生預备定理(Copson, 1935, p. 218) 以求得所須的漸近展开式

(20) $K_p(x)=e^{-xf(v_0)}\left[\sum_{n=0}^{M-1}b_{2n+1}x^{-n-\frac{1}{2}}\Gamma(n+\frac{1}{2})+O(x^{-M-\frac{1}{2}})\right].$

(18) 式中的系数可用柯西定理來求得为

(21) $4\pi ib_n=\int\tau^{-\frac{1}{2}n}\Phi(\tau)\,d\tau=\int[g(v)-g(v_0)]^{-\frac{1}{2}n}\,dv,$

后面一个積分是沿着一个在正方向内圍繞 $v=v_0$ 一次的小的閉圍綫來取的.

由于 $[g(v)-g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}}$ 在 $v=v_0$ 上具有一个 $2n+1$ 階極点,故可將 $(v-v_0)^{2n+1}[g(v)-g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}}$ 表示为台劳級数. 于是有

$$(v-v_0)^{2n+1}[g(v)-g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(n)}(v-v_0)^l$$

其中

$$(22)\quad A_l^{(n)}=\frac{1}{l!}\left\{\frac{d^l}{dv^l}(v-v_0)^{2n+1}[g(v)-g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}}\right\}_{v=v_0}.$$

另一方面,柯西定理給出

$$(23)\quad 2\pi i A_l^{(n)}=\int(v-v_0)^{2n-l}[g(v)-g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}}dv,$$

这一積分沿着一圍繞 $v=v_0$ 的閉圍綫進行. 对于 (20) 中的系数 b_{2n+1}, 比較 (21) 及 (23) 式可知为

$$(24)\quad b_{2n+1}=\tfrac{1}{2}A_{2n}^{(n)}$$

$$=\frac{1}{2(2n)!}\left\{\frac{d^{2n}}{dv^{2n}}(v-v_0)^{2n+1}[g(v)-g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}}\right\}_{v=v_0}$$

从而可得漸近展开式

$$(25)\quad K_p(x)=2^{-\frac{1}{2}}(p^2+x^2)^{-\frac{1}{4}}\exp[-(p^2+x^2)^{\frac{1}{2}}+p\,\mathrm{sh}^{-1}(p/x)]$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}2^m\alpha_m\Gamma(m+\tfrac{1}{2})(p^2+x^2)^{-\frac{1}{2}m}+O(x^{-M})\right],$$

$$p,\ x>0,$$

式中

$$\alpha_m=2^{\frac{1}{2}-m}(1+p^2/x^2)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}m}b_{2m+1}.$$

(25) 式中前几个系数为

$$(26)\quad \alpha_0=1,\ \alpha_1=-\frac{1}{8}+\frac{5}{24}(1+x^2/p^2)^{-1},$$

$$\alpha_2=\frac{3}{128}-\frac{77}{576}(1+x^2/p^2)^{-1}+\frac{385}{3456}(1+x^2/p^2)^{-2}.$$

J. 拜吉尔 (1937, p. 23) 用定相方法導出了一个类似展开式. 他給出了一个对 $p\geqslant x^{1/2}\geqslant 1$ 正确的公式如下:

(27) $$\Big|K_p(x)-2^{-1/2}(p^2+x^2)^{-1/4}\exp\left[-(p^2+x^2)^{1/2}+p\,\mathrm{sh}^{-1}(p/x)\right]\times\sum_{m=0}^{M-1}2^m d_{2m}\Gamma(m+1/2)(p^2+x^2)^{-1/2 m}/(2m)!\Big|$$
$$\leqslant Cw^{-2M}(p^2+x^2)^{-1/4}\exp\left[-(p^2+x^2)^{1/2}+p\,\mathrm{sh}^{-1}(p/x)\right],$$

式中 $w=px^{-1/2}$ 或 $(p^2+x^2)^{1/4}p^{-1/2}$, 根据 $p\leqslant x^{3/4}$ 或 $>x^{3/4}$ 而定.

对于 (27) 式中的系数,存在有下面的遞推关系:

(28) $$d_m=-\sum\left[\binom{m-1}{l}pd_l+\binom{m-1}{l-1}(p^2+x^2)^{1/2}d_{l-1}\right],$$

$d_0=1$, $d_1=d_2=0$. 此处当 $m-l$ 为奇数、$0\leqslant l\leqslant m-3$ 时,$\binom{m-1}{-1}$ 取为零,和由所有的 l 組成. 由 (28) 式可知

(29) $$d_0=1,\ d_2=0,\ d_4=-(p^2+x^2)^{1/2},\ d_6=10p^2-(p^2+x^2)^{1/2},$$
$$d_8=56p^2+35(p^2+x^2)-(p^2+x^2)^{1/2},$$
$$d_{10}=-2100p^2(p^2+x^2)+246p^2+210(p^2+x^2)-(p^2+x^2)^{1/2}.$$

$J_p(x)$ 及 $H_p^{(1)}(x)$ 的对应展开式同样可用最陡下降法从松宁費尔特表达式 7-3(20) 及 7-3(23) 中得出 (参看 Debye, 1909; Watson, 1944, p. 235; Weyrich, 1937, p. 49) (不同情形下最陡下降路徑的研究見 Emde, 1937, 1939, Emde 及 Rühle, 1934). 根据 p 为較大于、較小于或在 x 的鄰域中的不同而有不同的情形. 这些情形列于公式 7-13(11) 至 7-13(16) 中. 展开式 7-13(11) 及 7-13(14) 的余項的上界的公式, 系数的遞推关系式等分別由梅杰 (1933, p. 108) 及万文 (1927, p. 27) 導出.

最近(見 Schöbe, 1948), 第二亨克尔函数的二个不同的漸近展开式曾从 7-3(25) 式的圍綫積分中導出. 索比級数的項不像 7-13(11) 及 7-13(13) 式的第拜級数的項那样是初等函数,它們包含有 1/3 及 −2/3 階的第二亨克尔函数. 首項恰好是茄却尔生公式 7-13(27) 及華特生公式 7-13(34).

7-4-3. 过 度 域

$H_p^{(1)}(x)$ 的漸近展开式 7-13(11), 7-13(13) 及 7-13(15) 分别在 $x>p$, $x<p$, 及 x 接近于 p 时正确，但并不適于所有的可能情形，因为在后一情形下尚須加上条件 $x-p=O(x^{1/3})$. 在过度域中，即当 p/x 近似地等于 1 而 $|x-p|$ 很大时，应应用别的一些公式. 这些公式曾由華却尔生 (Watson, 1944, p. 248)、華特生 (1944, p. 249)、索比 (1948)、特列柯米 (1949) 導出.

整数 n 階的第一类貝塞尔函数的華却尔生公式为

(30)　$J_n(x) \sim \pi^{-1} 3^{-1/6} (\xi/x)^{1/3} K_{1/3}(\xi)$

(31)　$J_n(x) \sim 3^{-2/3} (\xi/x)^{1/3} [J_{1/3}(\xi)+J_{-1/3}(\xi)]$,

根据 $x<n$ 或 $x>n$ 而定，且

(32)　$$\xi=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2}|x-n|^{-3/2}.$$

[对于 $Y_n(x)$, 見 7-13(24) 及 7-13(26)]. 这二公式可根据定相原理(Watson, 1944, p. 229) 來導出. 为此目的，我們从積分表示式 7-3(2) 开始

(33)　$$\pi J_n(x)=\int_0^\pi \cos\,(n\phi - x\sin\phi)\,d\phi.$$

相在 $d/d\phi(n\phi - x\sin\phi)=0$ 或 $\cos\phi = n/x$ 处是定立的. 由于我們假定 n 近似地等于 x, ϕ 很小，在逗留点鄰域中可以 $\phi-\phi^3/6$ 代替 $\sin\phi$. 因此

$$\pi J_n(x) \sim \int_0^\pi \cos\,[x\phi^3/6-(x-n)\phi]\,d\phi$$

$$\sim \int_0^\infty \cos\,[x\phi^3/6-(x-n)\phi]\,d\phi.$$

当 $x<n$ 时，这是爱里積分式 7-3(39), 而当 $x>n$ 时，則是積分式 7-3(40), 从而确立了所需的結果 (30) 及 (31).

導出華却尔生公式的方法是一个可疑的方法；不僅如此，正确

的范圍及誤差值的階都是不能确定的．[定相方法的一个嚴格的理論曾由 Van der Corput (1934, 1936) 提出． J. Bijl (1937) 应用这一理論來導出貝塞尔函数的漸近展开式]．

華特生公式

聶却尔生公式的一个更精确的形式系由華特生所提出 (1944, p 250)，

(34) $$e^{i\pi/6}H_p^{(2)}(x)=3^{-1/2}we^{-ip(w-w^3/3-\tan^{-1}w)}\times H_{1/3}^{(2)}(pw^3/3)+O(p^{-1}).$$

此处階 p 不限定为整数，且

(35) $$w=(x^2/p^2-1)^{1/2},$$

此处在 $x>p$ 时 $\arg w=0$，而在 $x<p$ 时 $\arg w=\frac{1}{2}\pi$．$J_p(x)$ 及 $Y_p(x)$ 的对应公式見 7-13(28) 至 7-13(31)．如 x 近似地等于 p，則 w 可用 $(\frac{1}{2}p)^{-1/2}(x-p)^{1/2}$ 來代替 [$x>p$ 时 $\arg(x-p)^{1/2}=0$，$x<p$ 时 $\arg(x-p)^{1/2}=\frac{1}{2}\pi$]，于是可得聶却尔生公式 (30) 及 (31)．

索比 (1948) 从他的漸近展开式導出如下的結果 (見 7-13-2 節末)，

(36) $$e^{i\pi/6}H_p^{(2)}(x)=3^{-1/2}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1/2}\left(\frac{9}{10}+\frac{p}{10x}\right)^{-3/4}\times H_{1/3}^{(2)}\left[\xi\left(\frac{9}{10}+\frac{p}{10x}\right)^{-1/2}\right]+O(p^{-5/2}),$$

$$\xi=\frac{2}{3}(\tfrac{1}{2}x)^{-1/2}(x-p)^{3/2},$$

$x>p$ 时 $\arg(x-p)^{3/2}=0$，$x<p$ 时 $\arg(x-p)^{3/2}=3\pi/2$．

別的公式是由特列柯米 (1949) 導出．結果是

(37) $$\pi J_p[p+(p/6)^{1/3}t]=(6/p)^{1/3}A_1(t)-1/(10p)[3t^2A_1'(t)+2tA_1(t)]+O(p^{-5/3}),$$

(38) $$\pi Y_p[p+(p/6)^{1/3}t]=(6/p)^{1/3}A_2(t)+1/(10p)[3t^2A_2'(t)+2tA_2(t)]+O(p^{-5/3}).$$

此处 $A_1(t)$ 及 $A_2(t)$ 表示函数

(39) $A_1(t)=\pi/3\,(t/3)^{1/2}\{J_{-1/3}[2(t/3)^{3/2}]+J_{1/3}[2(t/3)^{3/2}]\}$,

(40) $A_2(t)=\pi/3t^{1/2}\{J_{-1/3}[2(t/3)^{3/2}]-J_{1/3}[2(t/3)^{3/2}]\}$,

[見爱里積分式 7-3(40)].

7-4-4. 均匀漸近展开式

微分方程法

前面所討論的漸近公式都是从貝塞尔函数的積分表示式、大半是从松尔费尔特公式(7-3-5)中得出. 另一种方法是以微分方程为出發点.

在下面，我們所討論的將以階 p 及自变量 x 都是正实数为限，并將貝塞尔方程 7-2(1) 用代換 $x=pe^y$ 來变換. 所得的方程为

(41) $w''(y)+p^2(e^{2y}-1)w(y)=0.$

形如下式的微分方程

(42) $w''(y)+[p^2\Phi^2(y)-K(y)]w(y)=0$

其中 p 是一个大的参数，这个方程的解的漸近性态曾由几个作者 (Horn, 1899; Schlesinger, 1907; Birkhoff, 1908; Blumenthal, 1912; Jeffreys, 1925; Jordan, 1930) 研究过. 基本的原則是近似地相同的微分方程將有近似地相同的解. 在早期作者的作品中，所用的比較方程具有一不变的 Φ，因此，所有这些方法在 $\Phi(y)$ 具有零点的区域內不能使用. 在貝塞尔方程的情形下，不能用这些方法的就是 $y=0$ 或 $x=p$ 的鄰域.

倫乔 (1931, 1932, 1934) 应用了一个比較方程，其中 $\Phi(y)$ 在本質上是 y 的一个適当的冪，因而可以应付 $\Phi^2(y)$ 的零点 (任何階). 倫乔比較方程的解可以用 $1/3$ 階的貝塞尔函数來表示. 將倫乔的結果应用于 (28) 式就可引出下面的漸近公式，在 $0<x<\infty$ 內一致有效 (Langer, 1931, pp. 60-61).

(43) $e^{i\pi/6}H_p^{(2)}(x)=w^{-1/2}(w-\tan^{-1}w)^{1/2}$

$\times H_{1/3}^{(2)}(pw-p\tan^{-1}w)+O(p^{-4/3}),\quad w=(x^2/p^2-1)^{1/2}.$

当 $x>p$ 时，$\arg w$ 及 $\arg(w-\tan^{-1}w)$ 都等于零；当 $x<p$ 时，$\arg w=\frac{1}{2}\pi$，而 $\arg(w-\tan^{-1}w)=3\pi/2$. [$J_p(x)$ 及 $Y_p(x)$ 的結果見公式 7-13(32) 至 7-13(35)]. $J_p(x)$ 的数值与用倫乔公式 (43) 所得出的数值之間的比較，見 Fock (1934)；將(43)推廣到复数 p 及 x 的情形，見 Langer (1932).

如 w 足夠小(x 近似地等于 p)，則 $w-\tan^{-1}w$ 可用 $w^3/3$ 來代替，可得出華特生公式 (34).

"近似地相同"的微分方程的方法也曾由齐雷(1949, p. 121)应用过，以求貝塞尔函数的均匀漸近展开式. $y^{1/2}J_p[\alpha(1-y^2)^{1/2}]$ 的微分方程为

$$\frac{d^2w}{du^2}+w\left[-p^2+(y^{-2}-1)\left(\frac{5}{4}y^{-4}-\frac{1}{4}y^{-2}+\alpha^2-p^2\right)\right]=0, \tag{44}$$

式中

$$u=\tanh^{-1}y-y. \tag{45}$$

在 $y=0$ 的鄰近，(44) 中的 w 的系数可以寫为

$$-p^2+\frac{5}{36}u^{-2}+(\alpha^2-p^2-1/35)(3u)^{-2/3}+P(u^{2/3})$$

此处 P 代表一冪級数. 这样，(44) 就相当于

$$\frac{d^2W}{du^2}+W\left(-p^2+\frac{5}{36}u^{-2}\right)=0. \tag{46}$$

但根据公式 7-2(62) 及 7-2(63)，可知(46)的一个解为

$$W=(pu)^{1/2}K_{1/3}(pu), \tag{47}$$

如將 (44) 寫为

$$\frac{d^2w}{du^2}+w\left(-p^2+\frac{5}{36}u^{-2}\right)=wf(u) \tag{48}$$

其中

$$f(u)=\frac{5}{36}u^{-2}-(y^{-2}-1)\left(\frac{5}{4}y^{-4}-\frac{1}{4}y^{-2}+\alpha^2-p^2\right), \tag{49}$$

那末，先以(47)式代(48)式右側的 w，就可应用参数变值法通过叠

代而得出 (48) 的解．其他結果可參看 Cherry (1949, 1950) 的著作．

7-5. 有关函数

有几个多項式和函数与貝塞尔函数相似，有些則出現在貝塞尔函数有关的研究中．这些多項式和函数在華特生的著作 (1944, 第 9 及 10 章) 中有詳細的討論．这里我們祇略为提一提这些函数中一部分的基本性質．詳細的研究可參看華特生的著作．

7-5-1. 紐孟多項式及有关多項式

紐孟多項式 $O_n(z)$ 由下式定义

$$(1)\qquad (z-\xi)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n J_n(\xi)O_n(z)$$

如 $n\geqslant 1$, $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_n=2$; $|\xi|<|z|$.

这一多項式在將任一解析函数 $f(z)$ 展开为級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n J_n(z)$$

的理論中很重要．为了得出一个 $O_n(z)$ 的顯式，我們先从下面的恆等式着手

$$(2)\qquad (x-\xi)^{-1}=z^{-1}\int_0^{\infty}e^{-x}e^{x\xi/z}\,dx,\qquad \operatorname{Re}\xi/z<1.$$

在 7-2(25) 中令 $\alpha=1$, 以 ξ 代 z, $2x/z$ 代 $t-t^{-1}$, 得

$$e^{x\xi/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\{z^{-n}[x+(x^2+z^2)^{1/2}]^n+(-z)^n[x+(x^2+z^2)^{1/2}]^{-n}\}J_n(\xi).$$

將这一式代入 (2), 并注意，如 $|\xi/z|<1$, 可進行逐項積分，將結果与 (1) 式比較，于是可得紐孟的積分表示式

$$(3)\qquad O_n(z)=\tfrac{1}{2}z^{-n-1}\int_0^{\infty}\{[x+(x^2+z^2)^{1/2}]^n$$
$$+[x-(x^2+z^2)^{1/2}]^n\}e^{-x}\,dx$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty e^{i\delta}}\{[t+(t^2+1)^{1/2}]^n+[t-(t^2+1)^{1/2}]^{-n}\}e^{-zt}\,dt,$$

式中 $n>0$, $|\delta+\arg z|<\frac{1}{2}\pi$.

为了表明 $O_n(z)$ 的多項式本質，在 (3) 式中，作代换

$$[(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\pm t]^n={}_2F_1(-\tfrac{1}{2}n,\ \tfrac{1}{2}n;\ \tfrac{1}{2};\ -t^2)$$
$$\pm nt\,{}_2F_1(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}n,\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n;\ \tfrac{3}{2};-t^2),$$

幷逐項積分，可得

$$(4)\qquad O_{2n}(z)=\tfrac{1}{2}n\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m-1)!}{(n-m)!}(\tfrac{1}{2}z)^{-2m-1},$$

$$(5)\qquad O_{2n+1}(z)=\tfrac{1}{2}(n+\tfrac{1}{2})\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(\tfrac{1}{2}z)^{-2m-2},$$

或者，經运算后有

$$(6)\qquad O_n(z)=\tfrac{1}{4}\sum_{m=0}^{<\frac{1}{2}n}n(n-m-1)!(\tfrac{1}{2}z)^{2m-n-1}/m! \qquad n\geqslant 1,$$

特别是

$$(7)\qquad O_0(z)=z^{-1},\ O_1(z)=z^{-2},\ O_2(z)=z^{-1}+4z^{-3}.$$

顯然 $O_n(z)$ 是 z^{-1} 的 $n+1$ 次多項式．从 (6) 式可得下面的不等式

$$(8)\qquad |O_n(z)|\leqslant 2^{n-1}n!|z|^{-n-1}\exp(\tfrac{1}{4}|z|^2), \qquad n>1.$$

因此，同时参照 7-3(4) 可知只要級数

$$\Sigma\alpha_n(\xi/z)^n$$

絕对收斂，則級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n J_n(\xi)O_n(z)$$

也絕对收斂.

从定义可得下面的关系:

$$(9)\qquad O_0'(z)=-O_1(z),$$

$$(10)\qquad 2O_n'(z)=O_{n-1}(z)-O_{n+1}(z), \qquad n\geqslant 1,$$

$$(11)\qquad (n-1)O_{n+1}(z)+(n+1)O_{n-1}(z)-2t^{-1}(n^2-1)O_n(z)$$
$$=2nt^{-1}(\sin\tfrac{1}{2}n\pi)^2,$$

$$(12)\qquad nzO_{n-1}(z)-(n^2-1)O_n(z)=(n-1)zO_n'(z)+n(\sin\tfrac{1}{2}n\pi)^2,$$

$$(13)\qquad nzO_{n+1}(z)-(n^2-1)O_n(z)=-(n+1)zO_n'(z)+n(\sin\tfrac{1}{2}n\pi)^2.$$

从这些关系可知 $O_n(z)$ 满足微分方程

(14) $$z^2\frac{d^2v}{dz^2}+3z\frac{dv}{dz}+(z^2+1-n^2)v=z(\cos\tfrac{1}{2}n\pi)^2$$
$$+n(\sin\tfrac{1}{2}n\pi)^2.$$

如 C 表示一圍繞原点的單閉圍道，則从 (6) 及 7-2(2) 可知

(15) $$\int_C O_m(z)O_n(z)dz=0, \qquad m=n \text{ 及 } m\neq n,$$

(16) $$\int_C J_m(z)O_n(z)dz=0, \qquad m\neq n,$$

(17) $$\int_C J_m(z)O_m(z)dz=\pi i, \qquad m\geqslant 1.$$

对于某些目的來說，应用許拉弗里多項式

(18) $$S_0(z)=0,\ S_n(z)=\sum_{m=0}^{<\frac{1}{2}n}(n-m-1)!\,(\tfrac{1}{2}z)^{-n+2m}/m! \qquad n\geqslant 1,$$

是較为方便的(Watson, 1944, 9-3～9-34 節). 它与紐孟多項式的关系为:

(19) $$nS_n(z)=2zO_n(z)-2(\cos\tfrac{1}{2}n\pi)^2.$$

紐孟还研究了多項式 $\Omega_n(z)$，用下面的展开式定义:

(20) $$(z^2-\xi^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n[J_n(z)]^2\Omega_n(z), \qquad |\xi|<|z|,$$

(見 Watson, 1944, 9-4 及 9-41 節).

上面的这些紐孟多項式都曾由盖根堡加以推廣(Watson, 9-2, 9-5 節). 定义用展开式为

(21) $$\xi^{\nu}/(z-\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n,\nu}(z)J_{\nu+n}(\xi), \qquad |\xi|<|z|,$$

(22) $$\xi^{\nu+\mu}/(z-\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n;\mu,\nu}(z)J_{\mu+\frac{1}{2}n}(\xi)J_{\nu+\frac{1}{2}n}(\xi).$$

7-5-2. 隆美耳多項式

重复应用 7-2(59) 的遞推关系，可知 $J_{\nu+m}$ 能表示为:

(23)　$J_{\nu+m}(z)=J_\nu(z)R_{m,\nu}(z)-J_{\nu-1}(z)R_{m-1,\nu+1}(z)$,

式中 $R_{m,\nu}$ 为 z^{-1} 的 m 次多項式;称为隆美耳多項式. 同样,有

(24)　$(-1)^m J_{-\nu-m}(z)=J_{-\nu}(z)R_{m,\nu}(z)+J_{-\nu-1}(z)R_{m-1,\nu+1}(z)$.

由 (23), (24) 及 7-11(33) 可得

(25)　$R_{m,\nu}(z)=\frac{1}{2}\pi z(\sin\nu\pi)^{-1}[J_{\nu+m}(z)J_{-\nu+1}(z)+(-1)^m J_{-\nu-m}(z)J_{\nu-1}(z)]$.

应用二貝塞尔函数之積的冪級数 7-2(48), 从公式 (25) 經簡化后可得

(26)　$$R_{m,\nu}(z)=\sum_{n=0}^{<\frac{1}{2}m}\frac{(-1)^m(m-n)!\Gamma(\nu+m-n)}{n!(m-2n)!\Gamma(\nu+n)}(\tfrac{1}{2}z)^{-m+2n}$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)}(\tfrac{1}{2}z)^{-m}{}_2F_3(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}m,\ -\tfrac{1}{2}m;\nu,\ -m,\ 1-\nu-m;\ -z^2).$$

因而可得

(27)　$R_{m,\nu}(z)=(-1)^m R_{m,-\nu-m+1}(z)$.

由于第二类貝塞尔函数都满足同样的遞推关系 7-2(56), 因此可得类似于(25)式的关系

(28)　$Y_{\nu+m}(z)=Y_\nu(z)R_{m,\nu}(z)-Y_{\nu-1}(z)R_{m-1,\nu+1}(z)$.

因此,由 (25) 及 7-11(36) 可得

(29)　$R_{m,\nu}(z)=-\frac{1}{2}\pi z[Y_{\nu+m}(z)J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+m}(z)Y_{\nu-1}(z)]$.

設 n 为一整数, 在 (25) 中, 令 $m=2n$, $\nu=\frac{1}{2}n$. 应用 (26) 及 7-11(5) 可得

(30)　$$[J_{n+\frac{1}{2}}(z)]^2+[J_{-n-\frac{1}{2}}(z)]^2=[J_{n+\frac{1}{2}}(z)]^2+[Y_{n+\frac{1}{2}}(z)]^2$$
$$=2(\pi z)^{-1}\sum_{m=0}^{n}\frac{(2z)^{2m-2n}(2n-2m)!(2n-m)!}{m!(n-m)!(n-m)!}.$$

$R_{m,\nu}$ 所满足的遞推关系及微分公式可从 (25) 式導出. 对于这些公式,及对于赫威兹極限式

(31)　$\lim_{m\to\infty}[(\frac{1}{2}z)^{m+\nu}R_{m,\nu+1}(z)/\Gamma(\nu+m+1)]=J_\nu(z)$

的証明,可参看華特生的著作 (1944, 9-63, 9-65 節). 其他結果可

参看 McDonald (1926) 的著作.

7-5-3. 恩乔-韋勃函数

恩乔函数 $\mathbf{J}_\nu(z)$ 及韋勃函数 $\mathbf{E}_\nu(z)$ 由下面的貝塞尔型積分定义:

(32) $$\mathbf{J}_\nu(z) \pm i\mathbf{E}_\nu(z) = \pi^{-1}\int_0^\pi e^{\pm i(\nu\phi - z\sin\phi)}\,d\phi.$$

因此,从 7-3(9) 及 7-3(10) 分别可得下面的表达式

(33) $$\begin{aligned}\mathbf{J}_\nu(z) &= J_\nu(z) + \pi^{-1}\sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,t - \nu t}\,dt \\ &= J_\nu(z) + \pi^{-1}\sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-zv}[v+(1+v^2)^{1/2}]^{-\nu}(1+v^2)^{-1/2}\,dv, \\ &\qquad\qquad \operatorname{Re} z > 0,\end{aligned}$$

(34) $$\begin{aligned}\mathbf{E}_\nu(z) &= -Y_\nu(z) - \pi^{-1}\int_0^\infty (e^{\nu t} + e^{-\nu t}\cos\nu\pi)e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt \\ &= -Y_\nu(z) - \pi^{-1}\int_0^\infty e^{-zv}\{[v+(1+v^2)^{1/2}]^\nu \\ &\qquad + \cos\nu\pi\,[v+(1+v^2)^{1/2}]^{-\nu}\}(1+v^2)^{-1/2}\,dv, \\ &\qquad\qquad \operatorname{Re} z > 0.\end{aligned}$$

从 (33) 式顯然有

(35) $$\mathbf{J}_n(z) = J_n(z). \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

將 (32) 式的被積式展开为 z 的冪級数而后应用 1-5(29) 逐項積分可得

(36) $$\begin{aligned}\mathbf{J}_\nu(z) &= \cos(\tfrac{1}{2}\nu\pi)\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(\frac{1}{2}z)^{2n}}{\Gamma(n+1+\frac{1}{2}\nu)\Gamma(n+1-\frac{1}{2}\nu)} \\ &\quad + \sin(\tfrac{1}{2}\nu\pi)\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(\frac{1}{2}z)^{2n+1}}{\Gamma(n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\nu)\Gamma(n+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\nu)},\end{aligned}$$

(37) $$\begin{aligned}\mathbf{E}_\nu(z) &= \sin(\tfrac{1}{2}\nu\pi)\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(\frac{1}{2}z)^{2n}}{\Gamma(n+1+\frac{1}{2}\nu)\Gamma(n+1-\frac{1}{2}\nu)} \\ &\quad - \cos(\tfrac{1}{2}\nu\pi)\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(\frac{1}{2}z)^{2n+1}}{\Gamma(n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\nu)\Gamma(n+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\nu)}.\end{aligned}$$

恩乔及韋勃函数之間的联系及它們的遞推关系

从(33)及(34)可得

(38) $\sin(\nu\pi)J_\nu(z)=\cos(\nu\pi)E_\nu(z)-E_{-\nu}(z)$,

(39) $\sin(\nu\pi)E_\nu(z)=J_{-\nu}(z)-\cos(\nu\pi)J_\nu(z)$.

如將(32)式微分，則得

$$2[J'_\nu(z)+iE'_\nu(z)]=\pi^{-1}\int_0^\pi\{e^{i[(\nu-1)\phi-z\sin\phi]}-e^{i[(\nu+1)\phi-z\sin\phi]}\}\,d\phi,$$

因此再应用(32)可得

(40) $2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$,

(41) $2E'_\nu(z)=E_{\nu-1}(z)-E_{\nu+1}(z)$.

同样，从(32)式可導出

(42) $J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)=2\nu z^{-1}J_\nu(z)-2(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi)$,

(43) $E_{\nu-1}(z)+E_{\nu+1}(z)=2\nu z^{-1}E_\nu(z)-2(\pi z)^{-1}(1-\cos\nu\pi)$.

从(33)及 7-2(1) 可得

$$J''_\nu(z)+z^{-1}J'_\nu(z)+(1-\nu^2z^{-2})J_\nu(z)$$
$$=\pi^{-1}z^{-2}\sin(\nu\pi)\int_0^\infty\frac{d}{dt}[(-z\operatorname{ch}t+\nu)e^{-z\operatorname{sh}t-\nu t}]\,dt,$$

这样，我們顯然有

(44) $J''_\nu(z)+z^{-1}J'_\nu(z)+(1-\nu^2z^{-2})J_\nu(z)=\pi^{-1}z^{-2}(z-\nu)\sin(\nu\pi)$.

从(39)及(44)可得

(45) $$E''_\nu(z)+z^{-1}E'_\nu(z)+(1-\nu^2z^{-2})E_\nu(z)$$
$$=-\pi^{-1}z^{-2}[z+\nu+(z-\nu)\cos(\nu\pi)].$$

漸近展开式

对于大的 z 及固定的 ν, $J_\nu(z)$ 及 $E_\nu(z)$ 的漸近展开式可以用華特生預备定理來求出．在(33)及(34)式中，分別代入

(46) $$[v+(1+v^2)^{1/2}]^\nu(1+v^2)^{-1/2}={}_2F_1(1/2+1/2\nu,1/2-1/2\nu;-v^2)$$
$$+\nu v\,{}_2F_1(1+1/2\nu,1-1/2\nu;3/2,-v^2).$$

并应用 2-1(2), 1-1(5), 可得

(47) $$\mathbf{J}_\nu(z)=J_\nu(z)+(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi)$$

$$\times\left[\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n 2^{2n}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu)_n(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu)_n z^{-2n}\right.$$

$$+O(|z|^{-2M})+\nu\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n 2^{2n}(1+\tfrac{1}{2}\nu)_n(1-\tfrac{1}{2}\nu)_n z^{-2n-1}$$

$$\left.+\nu O(|z|^{-2M-1})\right],$$

(48) $$\mathbf{E}_\nu(z)=-Y_\nu(z)-(\pi z)^{-1}(1+\cos\nu\pi)$$

$$\times\left[\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n 2^{2n}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu)_n(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu)_n z^{-2n}+O(|z|^{-2M})\right]$$

$$-\nu(\pi z^{-1})(1-\cos\nu\pi)$$

$$\times\left[\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n 2^{2n}(1+\tfrac{1}{2}\nu)_n(1-\tfrac{1}{2}\nu)_n z^{-2n-1}\right.$$

$$\left.+O(|z|^{-2M-1})\right].$$

(47) 及 (48) 中的 $J_\nu(z)$ 及 $Y_\nu(z)$ 的漸近展开式，見 7-13(3) 及 7-13(4).

对于大的 $|\nu|$ 及 $|z|$ 的情形，在華特生的著作中(1944, p. 316)有所討論.

7-5-4. 斯特拉夫函数

斯特拉夫函数由类似于泊松積分 7-3(3) 的表示式所定义，即

(49) $$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\mathbf{H}_\nu(z)=2\pi^{-1/2}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_0^1(1-t^2)^{\nu-1/2}\sin(zt)\,dt$$

$$=2\pi^{-1/2}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin(z\cos\phi)(\sin\phi)^{2\nu}\,d\phi,\quad \operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2}.$$

从这一表达式就可以証明 (Watson, 1944, p. 337) 当 x 为正数而 $\nu\geqslant\frac{1}{2}$ 时 $\mathbf{H}_\nu(x)$ 是正的.

如(49)变换为一回綫積分，則 ν 的限制可以撤銷，并得

(50) $$H_\nu(z) = -i\pi^{-1/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)(\tfrac{1}{2}z)^\nu \times \int_0^{(1+)} (t^2-1)^{\nu-1/2} \sin(zt)\, dt, \qquad \nu \neq \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \cdots$$

从 7-2(12) 可得另一表示式

(51) $$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})[H_\nu(\xi z) - Y_\nu(\xi z)] = \pi^{-1/2}(\tfrac{1}{2}\xi)^{\nu-1} z^\nu \times \int_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-zt}(1+t^2\xi^{-2})^{\nu-1/2}\, dt,$$

$$\beta - \tfrac{1}{2}\pi < \arg\xi < \beta + \tfrac{1}{2}\pi; \ -\tfrac{1}{2}\pi - \beta < \arg z < \tfrac{1}{2}\pi - \beta.$$

(其他的積分表示式見 Meijer, 1935a, p. 628, 744; 1939; 1940, p. 198, 366; Nielsen, 1904, p. 234).

修正斯特拉夫函数为

(52) $$L_\nu(z) = -ie^{-i\frac{1}{2}\nu\pi} H_\nu(ze^{i\frac{1}{2}\pi}),$$

因此从(49)得

(53) $$L_\nu(z)\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}) = 2\pi^{-1/2}(\tfrac{1}{2}z)^\nu \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sh}(z\cos\phi)(\sin\phi)^{2\nu}\, d\phi, \qquad \operatorname{Re}\nu > -\tfrac{1}{2}.$$

从(51)可得

(54) $$L_\nu(x) = I_{-\nu}(x) - \frac{2\pi^{-1/2}(\tfrac{1}{2}x)^\nu}{\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})} \int_0^\infty (1+t^2)^{\nu-1/2} \sin(xt)\, dt, \qquad x>0,\ \operatorname{Re}\nu < \tfrac{1}{2}.$$

把 $H_\nu(z)$ 表示为 z 的升冪級数的表示式可从(49)式將 $\sin(z\cos\phi)$ 展开为 z 的冪級数而求得,

(55) $$H_\nu(z) = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m (\tfrac{1}{2}z)^{\nu+2m+1} / [\Gamma(m+\tfrac{3}{2})\Gamma(\nu+m+\tfrac{3}{2})]$$
$$= 2\pi^{-1/2}(\tfrac{1}{2}z)^{\nu+1} {}_1F_2(1;\ \tfrac{3}{2}+\nu,\ \tfrac{3}{2};\ -\tfrac{1}{4}z^2)/\Gamma(\nu+\tfrac{3}{2}).$$

因此很明顯可以看出 $(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}H_\nu(z)$ 是 ν 及 z 的一个整函数. 此外尙有

(56) $$H_\nu(ze^{im\pi}) = e^{i\pi(\nu+1)m} H_\nu(z) \qquad m = 1, 2, 3, \cdots$$

从(52)可得

(57) $$L_\nu(z) = \sum_{m=0}^\infty (\tfrac{1}{2}z)^{\nu+2m+1} / [\Gamma(m+\tfrac{3}{2})\Gamma(\nu+m+\tfrac{3}{2})]$$
$$= 2\pi^{-1/2}(\tfrac{1}{2}z)^{\nu+1} {}_1F_2(1;\ \tfrac{3}{2}+\nu,\ \tfrac{3}{2};\ \tfrac{1}{4}z^2)/\Gamma(\nu+\tfrac{3}{2}).$$

从(55)式可很容易得出下面的微分公式

(58) $\dfrac{d}{dz}[z^{\nu}H_{\nu}(z)]=z^{\nu}H_{\nu-1}(z)$,

(59) $\dfrac{d}{dz}[z^{-\nu}H_{\nu}(z)]=2^{-\nu}\pi^{-1/2}/\Gamma(\nu+3/2)-z^{-\nu}H_{\nu+1}(z)$.

求出(58)及(59)式左側的微分并比較其結果可得

(60) $H_{\nu-1}(z)+H_{\nu+1}(z)=2\nu z^{-1}H_{\nu}(z)+\pi^{-1/2}(1/2\,z)^{\nu}/\Gamma(\nu+3/2)$.

(61) $H_{\nu-1}(z)-H_{\nu+1}(z)=2H'_{\nu}(z)-\pi^{-1/2}(1/2\,z)^{\nu}/\Gamma(\nu+3/2)$.

从(58)及(59)可知斯特拉夫函数满足下面的微分方程

(62) $z^2H''_{\nu}(z)+zH'_{\nu}(z)+(z^2-\nu^2)H_{\nu}(z)=\pi^{-1/2}(1/2\,z)^{\nu-1}/\Gamma(\nu+1/2)$.

漸近表示式

在(51)式中,令 $z=1$,并將 $(1+t^2\xi^{-2})^{\nu-1/2}$ 展开为 t 的升冪級数,逐項積分,可得適于大的 ξ 及固定的 ν 的公式:

(63) $$H_{\nu}(\xi)=Y_{\nu}(\xi)+\pi^{-1}\sum_{m=0}^{M-1}[\Gamma(m+1/2)(1/2\,\xi)^{-2m+\nu-1}/\Gamma(\nu+1/2-m)]+O(|\xi|^{\nu-2M-1}),\qquad |\arg\xi|<\pi.$$

$Y_{\nu}(\xi)$ 的漸近展开式見 7-13(4). 此外,可以証明,如 ν 为实数而 $\xi>0$,則只要 $M+1/2-\nu\geqslant0$,M 項以后的余項將与第一个略去項有相同的符号,而数值則較小.

对于大的 $|\nu|$ 及 $|\xi|$,可參看 Watson (1944, p. 333).

如 $\nu=n+1/2\,(n=0,1,2,\cdots)$,則(51)式中的 $(1+t^2\xi^{-2})^{\nu-1/2}$ 是一个多項式,我們有

(64) $$H_{n+1/2}(\xi)=Y_{n+1/2}(\xi)+\pi^{-1}\sum_{m=0}^{n}(1/2\,\xi)^{-2m+n-1/2}\Gamma(m+1/2)/\Gamma(n+1-m).$$

$Y_{n+1/2}(\xi)$ 的表示式,見 7-11(2). 此外,从(51)及(54)可得

(65) $$H_{-(n+1/2)}(z)=(-1)^nJ_{n+1/2}(z);\ L_{-(n+1/2)}(z)=I_{n+1/2}(z),\qquad n=0,1,2,\cdots$$

对于 $n=0$，从(64)可得

$$H_{\frac{1}{2}}(z)=(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}(1-\cos z).$$

如 n 为一正整数，則从 (37) 及 (55) 可得 (見 Watson, 1944, p. 337)

(66) $$H_n(z)=\pi^{-1}\sum_{m=0}^{<\frac{1}{2}n}\Gamma(m+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}z)^{n-2m-1}/\Gamma(n+\tfrac{1}{2}-m)-\mathbf{E}_n(z),$$

(67) $$H_{-n}(z)=(-1)^{n+1}\pi^{-1}\times\sum_{m=0}^{<\frac{1}{2}n}\Gamma(n-m-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}z)^{-n+2m+1}/\Gamma(m+\tfrac{3}{2})-\mathbf{E}_{-n}(z).$$

有关斯特拉夫函数的其他結果，見 Baudoux (1946).

7-5-5. 隆美耳函数

我們來研究下面的非齐次貝塞尔微分方程

(68) $$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-\nu^2)w=z^{\mu+1},$$

μ, ν 是不受限制的常数. (68)式的一个解为

(69) $$\begin{aligned}s_{\mu,\nu}(z)&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{\mu+1+2m}}{[(\mu+1)^2-\nu^2][(\mu+3)^2-\nu^2]\cdots[(\mu+2m+1)^2-\nu^2]}\\&=z^{\mu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{1}{2}z)^{2m+2}\Gamma(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+m+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+m+\frac{3}{2})}\\&=\frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)}\\&\quad\times{}_1F_2(1;\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{3}{2};\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{3}{2};-\tfrac{1}{4}z^2).\end{aligned}$$

当 $\mu\pm\nu$ 中有一数为奇整数时，解(69)变为無效.

如果微分方程 (68) 用参数变值法積出，且如其解当 z 很小时近似地为 $[(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)]^{-1}z^{\mu+1}$，有人得出下面的公式:

(70) $$s_{\mu,\nu}(z)=\tfrac{1}{2}\pi(\sin\nu\pi)^{-1}\Big[J_\nu(z)\int_0^z z^\mu J_{-\nu}(z)\,dz$$

$$-J_{-\nu}(z)\int_0^z z^\mu J_\nu(z)\,dz\Big]$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\Big[Y_\nu(z)\int_0^z z^\mu J_\nu(z)\,dz-J_\nu(z)\int_0^z z^\mu Y_\nu(z)\,dz\Big].$$

(70) 式中 $s_{\mu,\nu}$ 的二个表达式当 ν 不为整数时是恆等的．当 ν 为一整数时，前面一个表达式沒有定义，但后一式仍然正确．

(68)的另一特解为

(71) $$S_{\mu,\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)$$
$$+[2^{\mu-1}\Gamma(\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})/\sin(\nu\pi)]$$
$$\times\{\cos[\tfrac{1}{2}(\mu-\nu)\pi]J_{-\nu}(z)-\cos[\tfrac{1}{2}(\mu+\nu)\pi]J_\nu(z)\}$$
$$=s_{\mu,\nu}(z)+2^{\mu-1}\Gamma(\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})$$
$$\times\{\sin[\tfrac{1}{2}(\mu-\nu)\pi]J_\nu(z)-\cos[\tfrac{1}{2}(\mu-\nu)\pi]Y_\nu(z)\}.$$

当 $\mu\pm\nu$ 中有一数为奇正整数时，$S_{\mu,\nu}$ 可以用下面的 z 的有尽降冪級数來表示(見 Watson, 1944, p. 347)：

(72) $$S_{\mu,\nu}(z)=z^{\mu-1}\{1-[(\mu-1)^2-\nu^2]z^{-2}$$
$$+[(\mu-1)^2-\nu^2][(\mu-3)^2-\nu^2]z^{-4}-\cdots\}.$$

如 $\mu+\nu$ 或 $\mu-\nu$ 为一奇負整数，則 $s_{\mu,\nu}$ 沒有定义，但 $S_{\mu,\nu}(z)$ 趋近于一个極限(Watson, 1944, p. 348)．

遞推关系

从定义直接可推出

(73) $$s_{\mu+2,\nu}(z)=z^{\mu+1}-[(\mu+1)^2-\nu^2]s_{\mu,\nu}(z),$$

(74) $$s'_{\mu,\nu}(z)+(\nu/z)s_{\mu,\nu}(z)=(\mu+\nu-1)s_{\mu-1,\nu-1}(z),$$

(75) $$s'_{\mu,\nu}(z)-(\nu/z)s_{\mu,\nu}(z)=(\mu-\nu-1)s_{\mu-1,\nu+1}(z),$$

(76) $$(2\nu/z)s_{\mu,\nu}(z)$$
$$=(\mu+\nu-1)s_{\mu-1,\nu-1}(z)-(\mu-\nu-1)s_{\mu-1,\nu+1}(z),$$

(77) $$2s'_{\mu,\nu}(z)$$
$$=(\mu+\nu-1)s_{\mu-1,\nu-1}(z)+(\mu-\nu-1)s_{\mu-1,\nu+1}(z).$$

从(71)式可知，如果在(73)至(77)中以 $S_{\mu,\nu}(z)$ 代 $s_{\mu,\nu}(z)$，則所得的同样关系仍是正确的．

隆美耳函数的特殊情形

有几个与貝塞尔函数連帶的函数可以用隆美耳函数來表示.

(78) $O_{2n}(z)=z^{-1}S_{1,2n}(z),\ O_{2n+1}(z)=(2n+1)z^{-1}S_{0,2n+1}(z),$

(79) $S_{2n}(z)=4nS_{-1,2n}(z),\ S_{2n+1}(z)=2S_{0,2n+1}(z),$

(80) $A_{2n,\nu}(z)=2^{\nu}z^{\nu-1}\Gamma(\nu+n)(\nu+2n)S_{1-\nu,\nu+2n}(z)/n!,$

(81) $A_{2n+1,\nu}(z)$

$$=2^{\nu+1}z^{\nu-1}\Gamma(\nu+n+1)(\nu+2n+1)S_{-\nu,\nu+2n+1}(z)/n!,$$

(82) $J_{\nu}(z)=\pi^{-1}\sin(\nu\pi)[s_{0,\nu}(z)-\nu s_{-1,\nu}(z)].$

(83) $E_{\nu}(z)=-(1+\cos\nu\pi)s_{0,\nu}(z)/\pi-\nu(1-\cos\nu\pi)s_{-1,\nu}(z)/\pi,$

(84) $H_{\nu}(z)=2^{1-\nu}\pi^{-1/2}s_{\nu,\nu}(z)/\Gamma(\nu+1/2)$

$$=Y_{\nu}(z)+2^{1-\nu}\pi^{-1/2}s_{\nu,\nu}(z)/\Gamma(\nu+1/2).$$

这里所用的是 7–5 節中所說的記法.

楊氏函数(1912)为

(85) $C_{\nu}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}z^{\nu+2m}/\Gamma(\nu+2m+1)$

$$=z^{1/2}s_{\nu-3/2,1/2}(z)/\Gamma(\nu-1).$$

漸近展开式

級数(72)一般是發散的,但可以証明(見 Watson, 1944, p. 351)当 $|z|$ 是大数而 $|\arg z|<\pi$ 时,它就是 $S_{\mu,\nu}(z)$ 的一个漸近展开式.

積分表示式

下面的積分表示式

(86) $s_{\mu,\nu}(z)=2^{\mu}(\tfrac{1}{2}z)^{\frac{1}{2}(1+\nu+\mu)}\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu)$

$$\times\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}J_{\frac{1}{2}(1+\mu-\nu)}(z\sin\theta)(\sin\theta)^{\frac{1}{2}(1+\nu-\mu)}(\cos\theta)^{\nu+\mu}\,d\theta,$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu+1)>0.$$

可以展开为 z 的升幂式而得到証明. 其他的積分表示式, 見公式 7–12(48) 至 7–12(52) 及 Szymanski (1935)、Meijer (1935a,

1938, 1939 a, 1940, pp. 198, 366) 的著作.

隆美耳还曾研究了二变量的函数,定义为:

$$(87)\quad U_\nu(w, z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(w/z)^{\nu+2m}J_{\nu+2m}(z),$$

$$(88)\quad V_\nu(w, z)=\cos\left(\tfrac{1}{2}w+\tfrac{1}{2}z^2/w+\tfrac{1}{2}\nu\pi\right)+U_{-\nu+2}(w, z).$$

这些函数的理論,可参看 Watson (1944, 16-5～16-59 節) 及 Shastri (1938) 的著作.

7-5-6. 几种别的記法及有关函数

在聶尔生的"圓柱函数論手册" (Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen) 一書中, 有几种記法 (这些記法的表見 Nielsen 著作, p. 406) 与本書 7-5 節所用的不同. 他的記法是

$$Z^\nu(z)=\mathbf{H}_\nu(z),\ \Psi^\nu(z)=\mathbf{J}_\nu(z),\ \Omega^\nu(z)=-\mathbf{E}_\nu(z),$$

$$\Pi^{\nu,\rho}(z)$$

$$=2^{2-\rho}\cos\left[\tfrac{1}{2}\pi(\nu-\rho)\right]s_{\rho-1,\nu}(z)/\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\rho-\tfrac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\nu\right)\right].$$

此外,在他的書中还研究了下面的函数:

$$\Pi^\nu(z)=\tfrac{1}{2}[\mathbf{J}_\nu(z)+\mathbf{J}_{-\nu}(z)],\ \mathbf{X}^\nu(z)=\tfrac{1}{2}[\mathbf{J}_\nu(z)-\mathbf{J}_{-\nu}(z)],$$

$$\pi\Phi^\nu(z)=i^\nu\int_0^\pi e^{iz\cos\phi}\cos(\nu\phi)\,d\phi,$$

$$\pi\Lambda^\nu(z)=i^{1-\nu}\int_0^\pi e^{iz\cos\phi}\sin(\nu\phi)\,d\phi.$$

后面二个函数是本書貝塞尔系数的亨生積分 [見 7-12(2)] 的推廣[还可参看公式 7-12(40) 至 7-12(45)].

7-6. 加 法 定 理

有二种类型的貝塞尔函数展开式被称为加法定理. 大体說來,蓋根堡型的展开式是与球面波函数($2\nu+2$ 維)論相連系,而格喇夫型的展开式則是更密切地与柱面波理論有关. 这一說法不是十分精确的, 在当 $\nu=0$ 时二种类型完全一致. 实际上,这二类型是 J_0 的紐孟加法定理的二个不同的推廣.

7-6-1. 盖根堡加法定理

盖根堡加法定理將就第三类修正貝塞尔函数 $K_\nu(z)$ 來建立。令

(1) $w=(z^2+Z^2-2zZ\cos\phi)^{1/2}=[(Z-ze^{-i\phi})(Z-ze^{i\phi})]^{1/2}$,

先設 z, Z, ϕ 是实数, $0<z<Z$. 在7-12(23)中取 $z=1$ 及 $\alpha=w$, 則得

(2) $w^{-\nu}K_\nu(w)$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \exp[-t-(z^2+Z^2-2zZ\cos\phi)/t]t^{-\nu-1}\,dt.$$

如 $\nu\neq 0$, 則可应用沙湼展开式 7-10(5)

$\exp[t^{-1}zZ\cos\phi)$

$$=[2t/(zZ)]^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^\infty(\nu+n)C_n^\nu(\cos\phi)I_{\nu+n}(zZ/t),$$

代入(2), 并逐項積分〔运算过程中应用公式7-7(37)〕, 这样,就可得加法定理(关于 C_n^ν, 可参看3-15節),

(3) $w^{-\nu}K_\nu(w)=(\tfrac{1}{2}zZ)^{-\nu}\Gamma(\nu)$

$$\times\sum_{n=0}^\infty(\nu+n)C_n^\nu(\cos\phi)I_{\nu+n}(z)K_{\nu+n}(Z),$$

$$\nu\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ z<Z.$$

如令 ν 趋向于零,則应用3-15(14), 可得

(4) $K_0(w)=I_0(z)K_0(z)+2\sum_{n=1}^\infty I_n(z)K_n(Z)\cos n\phi,\quad z<Z.$

从公式7-2(12)及7-2(13)可知,級数(3)像 $\Sigma C_n^\nu(\cos\phi)(z/Z)^n$ 一样收斂,因此从3-15(1)可知,只要 $|ze^{\pm i\phi}|<|Z|$, (3)和(4)式都成立.

其他貝塞尔函数的加法定理,可借助于公式7-2(16), 7-2(17), 7-2(7)及7-2(8)从(3)式中推出. 还可参看7-15(28)至7-15(32).

7-6-2. 格喇夫加法定理

格喇夫加法定理为

(5) $$J_\nu(w)\left(\frac{Z-ze^{-i\phi}}{Z-ze^{i\phi}}\right)^{\frac{1}{2}\nu}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_{\nu+n}(Z)J_n(z)e^{in\phi},$$

式中

$$|ze^{\pm i\phi}|<|Z|,\ w=(z^2+Z^2-2zZ\cos\phi)^{\frac{1}{2}}$$
$$=[(Z-ze^{-i\phi})(Z-ze^{i\phi})]^{\frac{1}{2}},$$

这一公式可以証明如下．从 7-3(5) 可得

$$(2\pi i)J_{\nu+n}(Z)J_n(z)e^{in\phi}$$
$$=\int_{-\infty\exp(-i\beta)}^{(0+)}e^{\frac{1}{2}Z(t-t^{-1})}t^{-\nu-1}(e^{i\phi}/t)^nJ_n(z)\,dt.$$

从 7-2(25) 式可得

$$(2\pi i)\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_{\nu+n}(Z)J_n(z)e^{in\phi}$$
$$=\int_{-\infty\exp(-i\beta)}^{(0+)}\exp\left[\tfrac{1}{2}Z(t-t^{-1})-\tfrac{1}{2}z(te^{-i\phi}-t^{-1}e^{i\phi})\right]t^{-\nu-1}\,dt.$$

現在令 $(Z-ze^{-i\phi})t=wv$, $(Z-ze^{i\phi})/t=w/v$, 并在 (1) 式中取 $z\to 0$ 时可使 $w\to +Z$ 的那个平方根，于是可使積分圍道起迄于 $-\infty\exp(-i\alpha)$, 此处 $\alpha=\arg w$. 这样就有

$$(2\pi i)\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_{\nu+n}(Z)J_n(z)e^{in\phi}=w^{-\nu}(Z-ze^{-i\phi})^{\nu}$$
$$\times\int_{-\infty\exp(-i\alpha)}^{(0+)}\exp\left[\tfrac{1}{2}w(v-v^{-1})\right]v^{-\nu-1}\,dv.$$

再应用公式 7-3(5), 就可得 (5).

公式 (5) 可以用稍为不同的形式寫出，引入一个角 ψ, 其关系为

$$Z-z\cos\phi=w\cos\psi,\quad z\sin\phi=w\sin\psi,$$

因此，如 ϕ 是实数而 z, Z, w 是正数，则 ψ 就是以 z, Z, w 为边的三角形内对着 z 边的角．于是有

(6) $$e^{i\nu\psi}J_\nu(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_{\nu+n}(Z)J_n(z)e^{in\phi},$$

如 $\nu\neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 则 $|ze^{\pm i\phi}|<|Z|$.

对于其他的貝塞尔函数，見公式 7-15(33) 至 7-15(36).

对于階为一奇整数一半的第一类貝塞尔函数及修正亨克尔函数，柯克(1930)曾導出了一个加倍公式．他的結果是

(7) $$J_{m+\frac{1}{2}}(2z)=(-1)^m\pi^{\frac{1}{2}}m!z^{m+\frac{1}{2}}\times\sum_{n=0}^{m}(-1)^n(2m-2n+1)J_{m-n+\frac{1}{2}}(z)\times J_{-(m-n+\frac{1}{2})}(z)/[n!(2m-n+1)!].$$

(8) $$K_{m+\frac{1}{2}}(2z)=\pi^{-\frac{1}{2}}m!z^{m+\frac{1}{2}}\times\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n(2m-2n+1)[K_{m-n+\frac{1}{2}}(z)]^2}{n!(2m-n+1)!},$$

其他类似的公式見 Cooke (1930) 的著作．

7-7. 積分公式

7-7-1. 不定積分

从 7-2(52) 及 7-2(53) 式分别可得

(1) $$\int z^{\nu+1}J_\nu(z)dz=z^{\nu+1}J_{\nu+1}(z),$$

(2) $$\int z^{-\nu+1}J_\nu(z)dz=-z^{-\nu+1}J_{\nu-1}(z).$$

从 7-2(57) 式可得

(3) $$\int J_\nu(z)dz=2\sum_{n=0}^{m-1}J_{\nu+2n+1}(z)+\int J_{\nu+2m}(z)dz,\quad m=1,2,3,\cdots$$

方程 7-2(4) 至 7-2(6) 表明 (1) 至 (3) 式对 $Y_\nu(z)$ 及 $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ 都有效．其他类似的公式見 7-14(1) 至 7-14(13).

7-7-2. 定積分

很多包含貝塞尔函数的定積分具有摺合形式

$$F*G(t)=\int_0^t F(v)G(t-v)dv,$$

它可用拉普拉斯变换的褶積公式（見 Doetsch, 1937, p. 161; Widder, 1941, p. 84）來計值．根据这一方法，如

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt\equiv L\{F\},$$

且

$$g(s)=L\{G\},$$

則

$$f(s)g(s)=L\{F*G\}.$$

这一公式，举例說，当 $L\{F\}$ 及 $L\{G\}$ 絕对收斂时正确．

我們用这一方法來証明沙涅第二積分作为例子．取

$$F_\mu(\alpha,t)=\alpha^{-\mu}t^{\frac12\mu}J_\mu(\alpha t^{\frac12}),$$

从(24)式，当 $\mathrm{Re}\,\mu>-1$ 时有

$$f_\mu(\alpha,s)=L\{F_\mu(\alpha,t)\}=2^{-\mu}s^{-\mu-1}\exp\left(-\tfrac14\alpha^2s^{-1}\right),$$

今

$$f_\mu(\alpha,s)f_\nu(\beta,s)=2f_{\mu+\nu+1}[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac12},s],$$

这就引出了沙涅積分

$$\int_0^t\tau^{\frac12\mu}J_\mu(\alpha\tau^{\frac12})(t-\tau)^{\frac12\nu}J_\nu[\beta(t-\tau)^{\frac12}]\,d\tau$$
$$=2\alpha^\mu\beta^\nu(\alpha^2+\beta^2)^{-\frac12(\nu+\mu+1)}J_{\nu+\mu+1}[t(\alpha^2+\beta^2)^{\frac12}],$$
$$\mathrm{Re}\,\nu>-1,\ \mathrm{Re}\,\mu>-1.$$

令 $t=1$，并作代换 $\tau=(\sin\theta)^2$，可得

$$(4)\qquad \int_0^{\frac12\pi}J_\mu(\alpha\sin\theta)J_\nu(\beta\cos\theta)(\sin\theta)^{\mu+1}(\cos\theta)^{\nu+1}\,d\theta$$
$$=\alpha^\mu\beta^\nu(\alpha^2+\beta^2)^{-\frac12(\nu+\mu+1)}J_{\nu+\mu+1}[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac12}],$$
$$\mathrm{Re}\,\nu>-1,\ \mathrm{Re}\,\mu>-1.$$

(4) 式的一个極限情形可以單独說明一下．如以 β^ν 除式 (4) 的二边，并令 $\beta\to0$，于是得沙涅第一積分式

$$(5)\qquad \int_0^{\frac12\pi}J_\mu(\alpha\sin\theta)(\sin\theta)^{\mu+1}(\cos\theta)^{2\rho+1}\,d\theta$$
$$=2^\rho\Gamma(\rho+1)\alpha^{-\rho-1}J_{\rho+\mu+1}(\alpha),\qquad \mathrm{Re}\,\rho>-1,\ \mathrm{Re}\,\mu>-1.$$

別的褶合式公式有：

(6) $$\int_0^t \tau^\mu J_\mu(\tau)(t-\tau)^\nu J_\nu(t-\tau)\,d\tau$$
$$=(2\pi)^{-1/2}\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(\mu+1/2)t^{\nu+\mu+1/2}J_{\nu+\mu+1/2}(t)/\Gamma(\nu+\mu+1)$$
$$\operatorname{Re}\mu>-1/2,\ \operatorname{Re}\nu>-1/2.$$

(見 Hardy, 1921, p. 169) 及

(7) $$\int_0^t \tau^{-1/2}J_{2\nu}(\alpha\tau^{1/2})(t-\tau)^{-1/2}\cos[\beta(t-\tau)^{1/2}]\,d\tau$$
$$=\pi J_\nu\{1/2\,t^{1/2}[(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}+\beta)\}J_\nu\{1/2\,t^{1/2}[(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}-\beta]\},$$
$$\operatorname{Re}\nu>-1/2,$$

上式可以寫为

(8) $$\int_0^{1/2\pi} J_{2\nu}[2(z\zeta)^{1/2}\sin\theta]\cos[(z-\zeta)\cos\theta]\,d\theta$$
$$=1/2\,\pi J_\nu(z)J_\nu(\zeta),\qquad \operatorname{Re}\nu>-1/2.$$

公式(6)及(7)分别是褶積定理与(17)及(23),(25)式結合下所得的結果.

一个包含斯特拉夫函数,对应于沙涅第一積分(5)的積分公式为

(9) $$\int_0^{1/2\pi} \boldsymbol{H}_\mu(z\sin\theta)(\sin\theta)^{\mu+1}(\cos\theta)^{2\rho+1}\,d\theta$$
$$=\Gamma(\rho+1)2^\rho z^{-\rho-1}\boldsymbol{H}_{\rho+\mu+1}(z),\qquad \operatorname{Re}\rho>-1,\ \operatorname{Re}\mu>-3/2,$$

这一式可証明如下. 將積分号下的斯特拉夫函数根据 7-5(55) 式展开,而后用 1-5(19) 式逐項積分,卽可得公式 (9).

在很多情形下,二貝塞尔函数之積的冪級数表示式 7-2(47) 至 7-2(49) 可用以計算包含貝塞尔函数的積分. 例如,从 7-2(2) 及 1-5(19),可得

$$\int_0^{1/2\pi} J_\nu(2z\sin\theta)(\sin\theta)^\nu(\cos\theta)^{2\nu}\,d\theta$$
$$=1/2\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m z^{\nu+2m}\Gamma(\nu+m+1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(2\nu+m+1)},$$

再应用 7-2(49), 就可導出下面的結果

(10) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\nu(2z\sin\theta)(\sin\theta)^\nu(\cos\theta)^{2\nu}\,d\theta$$

$$=\tfrac{1}{2}z^{-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})[J_\nu(z)]^2, \qquad \operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2}.$$

同样,可証明紐孟公式

(11) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_{\nu+\mu}(2z\cos\theta)\cos[(\mu-\nu)\theta]\,d\theta$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi J_\nu(z)J_\mu(z), \qquad \operatorname{Re}(\nu+\mu)>-1,$$

在証明中,我們应用到公式 7-2(2), 1-5(19) 及 7-2(49).

紐孟公式的一个推廣是

(12) $$\pi(2\alpha z)^{-\mu}(2\beta z)^{-\nu}J_\mu(\alpha z)J_\nu(\beta z)$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} e^{i\theta(\mu-\nu)}(\cos\theta)^{\nu+\mu}(\lambda z)^{-\nu-\mu}J_{\nu+\mu}(\lambda z)\,d\theta,$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu)>-1,\ \lambda=[2\cos\theta(\alpha^2e^{i\theta}+\beta^2e^{-i\theta})]^{\frac{1}{2}}.$$

这一式的証明如下: 將積分号内的貝塞尔函数用 7-2(2) 式展开,得

$$\pi(\alpha z)^{-\mu}(\beta z)^{-\nu}J_\mu(\alpha z)J_\nu(\beta z)$$

$$=\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m 2^{-m} z^{2m}}{m!\,\Gamma(m+\nu+\mu+1)}$$

$$\times\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} e^{i\theta(\mu-\nu)}(\cos\theta)^{m+\mu+\nu}(\alpha^2e^{i\theta}+\beta^2e^{-i\theta})^m\,d\theta,$$

但是这一積分是可以用超比函数 ${}_2F_1$ 來表示的 [还可与 2-4(11) 比較],根据 7-2(47), 就可很明顯地看出(12)式的正确性[有关表示式見 7-14(60)].

另一类積分公式可从 7-6 及 7-15 節的加法定理中導出. 从 7-15(31) 可得

(13) $$\pi[J_n(z)]^2=\int_0^\pi J_0(2z\sin\phi)\cos(2n\phi)\,d\phi,$$

$$n=0,1,2,\cdots$$

或者,更一般地,如以 Z_ν 代表任一个第一类,第二类或第三类貝塞尔函数,則从公式 7-15(28), 7-15(29) 及 3-15(17) 可得

(14) $\int_0^{\pi} w^{-\nu} Z_\nu(w) C_m^\nu(\cos\phi)(\sin\phi)^{2\nu}\,d\phi$

$= 2\pi\Gamma(m+2\nu)(2zy)^{-\nu} Z_{\nu+m}(y) J_{\nu+m}(z)/[m!\,\Gamma(\nu)],$

$w=(z^2+y^2-2zy\cos\phi)^{1/2},\ \mathrm{Re}\,\nu>-1/2,\ m=0,1,2,\cdots.$

同样类型的其他公式見 7–14(14) 至 7–14(23)，及 Watson (1944, p. 373)、Copson (1932)、Rutgers (1941)、B. N. Bose (1948)、MacRobert (1947, p. 383).

7–7–3. 具有指数函数的無窮積分

公式

(15) $2^{\nu+\mu}\alpha^{-\mu}\beta^{-\nu}\gamma^{\lambda+\mu+\nu}\Gamma(\nu+1)\int_0^\infty J_\mu(\alpha t)J_\nu(\beta t)e^{-\gamma t}t^{\lambda-1}\,dt$

$= \sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(\lambda+\mu+\nu+2m)}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}$

$\times {}_2F_1(-m,\ -\mu-m;\ \nu+1;\ \beta^2\alpha^{-2})(-1/4\,\alpha^2\gamma^{-2})^m,$

$\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu+\nu)>0,\ \mathrm{Re}\,(\gamma\pm i\alpha\pm i\beta)>0.$

这一式可以这样來証明：將貝塞尔函数的積用冪級数展开式 7–2(47) 代替，逐項積分，并应用 1–1(5)，卽得 (15)．在某些特殊情形下，(15) 式的右側簡化为較簡單的式子．例如，如令 $\lambda+\nu=\rho$，并設 β 趋向于零，則得亨克尔積分

(16) $(2\gamma/\alpha)^\mu\gamma^\rho\Gamma(\mu+1)\int_0^\infty e^{-\gamma t}J_\mu(\alpha t)t^{\rho-1}\,dt$

$=\Gamma(\rho+\mu)\,{}_2F_1(1/2\,\rho+1/2\,\mu,\ 1/2\,\rho+1/2\,\mu+1/2;\ \mu+1;\ -\alpha^2\gamma^{-2})$

$=\Gamma(\mu+\rho)(1+\alpha^2\gamma^{-2})^{-1/2\mu-1/2\rho}$

$\times {}_2F_1[1/2\rho+1/2\mu,\ 1/2+1/2\mu-1/2\,\rho;\ \mu+1;\ \alpha^2/(\alpha^2+\gamma^2)],$

$\mathrm{Re}\,(\rho+\mu)>0,\ \mathrm{Re}\,(\gamma\pm i\alpha)>0.$

(16) 的第二个表达式系应用超比函数的变換公式 2–10(6) 从第一表达式中導出．

从 (16) 式的第二公式中可知，如 $\rho=\mu+1$，則

(17) $$\int_0^\infty e^{-\gamma t}J_\mu(\alpha t)t^\mu dt=\pi^{-1/2}(2\alpha)^\mu\Gamma(\mu+1/2)(\gamma^2+\alpha^2)^{-1/2-\mu}$$

$$\mathrm{Re}\,(2\mu+1)>0,\ \mathrm{Re}\,(\gamma\pm i\alpha)>0.$$

如果在(16)中 $\rho=1$，則从 2-8(4) 可得

(18) $$\int_0^\infty e^{-\gamma t}J_\mu(\alpha t)dt=\alpha^{-\mu}(\gamma^2+\alpha^2)^{-1/2}[(\gamma^2+\alpha^2)^{1/2}-\gamma]^\mu$$

$$\mathrm{Re}\,\mu>-1,\ \mathrm{Re}\,(\gamma\pm i\alpha)>0.$$

此外，从(16)的第二表达式中，取 $\gamma=0$，并应用公式 2-1(14)，可得

(19) $$\int_0^\infty J_\mu(\alpha t)t^{\rho-1}dt=2^{\rho-1}\alpha^{-\rho}\Gamma(1/2\mu+1/2\rho)/\Gamma(1+1/2\mu-1/2\rho),$$

$$-\mathrm{Re}\,\mu<\mathrm{Re}\,\rho<3/2,\ \alpha>0.$$

同理，可以建立出很多在指数函数中包含積分变量平方的类似積分公式．例如

(20) $$2^{\nu+\mu+1}\alpha^{-\mu}\beta^{-\nu}\gamma^{\nu+\mu+\lambda}\Gamma(\nu+1)\int_0^\infty J_\mu(\alpha t)J_\nu(\beta t)e^{-\gamma^2t^2}t^{\lambda-1}dt$$

$$=\sum_{m=0}^\infty\frac{\Gamma(m+1/2\nu+1/2\mu+1/2\lambda)}{m!\Gamma(m+\mu+1)}$$

$$\times{}_2F_1(-m,\ -\mu-m;\ \nu+1;\ \beta^2\alpha^{-2})(-1/4\,\alpha^2\gamma^{-2})^m,$$

$$\mathrm{Re}\,(\mu+\nu+\lambda)>0,\ \mathrm{Re}\,\gamma^2>0.$$

这一式可以应用 7-2(47) 式并逐項積分來導出．現在我們來研究几种可將 (20) 式簡化成較簡單表达式的特殊情形．

設 $\beta=\alpha$; 則用 2-1(14) 式可得

(21) $$\int_0^\infty J_\mu(\alpha t)J_\nu(\alpha t)e^{-\gamma^2t^2}t^{\lambda-1}dt$$

$$=2^{-\nu-\mu-1}\gamma^{-\nu-\lambda-\mu}\alpha^{\nu+\mu}\frac{\Gamma(1/2\lambda+1/2\mu+1/2\nu)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}$$

$$\times{}_3F_3(1/2\nu+1/2\mu+1/2,\ 1/2\nu+1/2\mu+1,\ 1/2\nu+1/2\mu+1/2\lambda;$$

$$\mu+1,\ \nu+1,\ \mu+\nu+1;\ -\alpha^2\gamma^{-2}),$$

$$\mathrm{Re}\,(\nu+\lambda+\mu)>0,\ \mathrm{Re}\,\gamma^2>0.$$

令(20)式中的 β 趋于零，則(20)式右側的表达式簡化为合流

超比函数，如以 $\nu+\lambda=\rho$，则

$$(22)\quad \Gamma(\mu+1)\int_0^\infty J_\mu(\alpha t)e^{-\gamma^2t^2}t^{\rho-1}\,dt$$

$$=\tfrac{1}{2}\gamma^{-\rho}\Gamma(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\rho)(\tfrac{1}{2}\alpha/\gamma)^\mu{}_1F_1(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\rho;\ \mu\pm1;\ -\tfrac{1}{4}\alpha^2\gamma^2)$$

$$=\tfrac{1}{2}\gamma^{-\rho}\Gamma(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\rho)(\tfrac{1}{2}\alpha/\gamma)^\mu\exp(-\tfrac{1}{4}\alpha^2\gamma^{-2})$$

$$\times{}_1F_1(\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\rho+1;\ \mu+1;\ \tfrac{1}{4}\alpha^2\gamma^{-2}),$$

$$\operatorname{Re}\gamma^2>0,\ \operatorname{Re}(\mu+\rho)>0.$$

此外尚有

$$(23)\quad \int_0^\infty J_\mu(\alpha t)e^{-\gamma^2t^2}\,dt=\tfrac{1}{2}\pi^{1/2}\gamma^{-1}\exp(-2^{-3}\alpha^2\gamma^{-2})I_{1/2\mu}(2^{-3}\alpha^2\gamma^{-2}),$$

$$\operatorname{Re}\gamma^2>0,\ \operatorname{Re}\mu>-1,$$

$$(24)\quad \int_0^\infty J_\mu(\alpha t)e^{-\gamma^2t^2}t^{\mu+1}\,dt=\alpha^\mu(2\gamma^2)^{-\mu-1}\exp(-\tfrac{1}{4}\alpha^2\gamma^{-2}),$$

$$\operatorname{Re}\mu>-1,\ \operatorname{Re}\gamma^2>0,$$

$$(25)\quad \int_0^\infty J_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)e^{-\gamma^2t^2}t\,dt$$

$$=\tfrac{1}{2}\gamma^{-2}\exp[-\tfrac{1}{4}\gamma^{-2}(\alpha^2+\beta^2)]I_\nu(\tfrac{1}{2}\alpha\beta\gamma^{-2}),$$

$$\operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\gamma^2>0.$$

公式 (23) 及 (24) 起源于 (22)，(25) 则起源于 (20).

一个类似于(16)式的公式为

$$(26)\quad \Gamma(\tfrac{1}{2}+\mu)\pi^{-1/2}(2\beta)^{-\nu}(\alpha+\beta)^{\nu+\mu}\int_0^\infty e^{-\alpha t}K_\nu(\beta t)t^{\mu-1}\,dt$$

$$=\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu-\nu){}_2F_1[\nu+\mu,\ \nu+\tfrac{1}{2};\ \mu+\tfrac{1}{2};\ (\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)]$$

$$=(2\alpha)^{-2\nu-2\mu}(\alpha+\beta)^{2\nu+2\mu}\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu-\nu)$$

$$\times{}_2F_1(\nu+\mu,\ \mu;\ 2\nu+2\mu;\ 1-\beta^2/\alpha^2),$$

$$\operatorname{Re}(\mu\pm\nu)>0,\ \operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0,$$

它可这样来証明：將 $K_\nu(\beta t)$ 用 7-3(15) 式代入，調換積分次序，而后应用 2-12(5) 即可得証. 从公式 (26) 及 2-8(47)，对于 $\alpha=0$，有

(27) $\int_0^\infty K_\nu(\beta t)t^{\mu-1}dt=2^{\mu-2}\beta^{-\mu}\Gamma(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu)\Gamma(\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu),$

$\operatorname{Re}(\mu\pm\nu)>0,\ \operatorname{Re}\beta>0.$

此外,从(23)及 7-2(13) 可得

(28) $\int_0^\infty K_\mu(\alpha t)e^{-\gamma^2t^2}\,dt=\tfrac{1}{4}\pi^{1/2}\gamma^{-1}\sec(\tfrac{1}{2}\mu\pi)\exp(2^{-3}\alpha^2/\gamma^2)$

$\times K_{1/2\mu}(2^{-3}\alpha^2/\gamma^2),\qquad -1<\operatorname{Re}\mu<1.$

其余的可参看 Shabde (1935)、Mohan (1942, p. 171)、Sinha (1942).

7-7-4. 韋勃及謝希特林的間断積分

現在我們來研究積分式 $\int_0^\infty J_\mu(at)J_\nu(bt)t^{-\rho}\,dt$, 其中的 a, b 都是实数. 可以証明, 对于所有正的 a 及 b, 即使積分收斂, 但其解析表达式仍然根据 a 的小于、等于或大于 b 而有所不同. 結果有:

(29) $2^\rho b^{\mu-\rho+1}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\rho-\tfrac{1}{2}\mu)$

$\times\int_0^\infty J_\mu(at)J_\nu(bt)t^{-\rho}\,dt$

$=a^\mu\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\rho)$

$\times{}_2F_1(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\rho,\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\rho;$

$\mu+1;\ a^2/b^2),$

$\operatorname{Re}(\nu+\mu-\lambda+1)>0,\ \operatorname{Re}\rho>-1,\ 0<a<b.$

对于 $0<b<a$, 也有一相应的表达式[在(29)中 a 及 b 互調], 又

(30) $\int_0^\infty J_\mu(at)J_\nu(at)t^{-\rho}\,dt$

$=\dfrac{(\tfrac{1}{2}a)^{\rho-1}\Gamma(\rho)\Gamma(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rho)}{2\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\rho)\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\rho)\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\rho)}$

$\operatorname{Re}(\nu+\mu+1)>\operatorname{Re}\rho>0,\ a>0.$

这些公式的証明如下: 在(29)的被積式中, 应用公式(12), 以 $\alpha=a$, $\beta=b$, $z=t$, 調換積分次序, 用(19)式对 t 計算出積分的值, 可得

$$\int_0^\infty J_\mu(at)J_\nu(bt)t^{-\rho}\,dt$$

$$=\pi^{-1}a^\mu b^\nu 2^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2})}$$

$$\times\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}e^{i\theta(\mu-\nu)}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+\rho-1)}$$

$$\times(a^2e^{i\theta}+b^2e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}(\rho-\nu-\mu-1)}\,d\theta.$$

但右側的被積式可以表示为超比函数 ${}_2F_1$ [与 2-4(11) 比較]，根据 $b>a$，或 $b=a$，立卽可得表达式(29)及(30)．在某些特殊情形下，超比函数可以簡化为一个較簡單的函数．例如，公式 7-14(28) 至 7-14(31) 可以从(29)及(30)式令 $\rho=\nu=\frac{1}{2}$ 而導出．

一个与韋勃-謝希特林積分有关的積分式(但其中有一貝塞尔函数用第三类修正貝塞尔函数代替)也可同样用超比函数來表示，但它在 $a=b$ 上不間断．我們有

$$(31)\quad 2^{\rho+1}\alpha^{\nu-\rho+1}\Gamma(\nu+1)\int_0^\infty K_\mu(\alpha t)J_\nu(\beta t)t^{-\rho}\,dt$$

$$=\beta^\nu\Gamma(\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\rho-\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2})$$

$$\times{}_2F_1(\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\rho-\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2};$$

$$\nu+1;\ -\beta^2/\alpha^2),$$

$$\operatorname{Re}(\alpha\pm i\beta)>0,\ \operatorname{Re}(\nu-\rho+1\pm\mu)>0,$$

將 $J_\nu(\beta t)$ 展开为 7-2(2) 的冪級数進行逐項積分而后用(27)式卽可得到証明．同样类型的其他公式，見 7-14(35) 至 7-14(39)．此处，公式 7-14(35) 及 7-14(36) 是 (31) 式的推論．别的公式曾由迪克斯恩及斐勒 (1930) 給出．

7-7-5. 沙湼及盖根堡積分式及推廣式

比(29)至(30)式更普遍型的間断積分式曾由沙湼及盖根堡研究过．積分式

$$(32)\quad \int_0^\infty J_\mu(bt)J_\nu[a(t^2+z^2)^{\frac{1}{2}}](t^2+z^2)^{-\frac{1}{2}\nu}\,t^{\mu+1}\,dt$$

$$= 0, \qquad a<b,\ \mathrm{Re}\,\nu>\mathrm{Re}\,\mu>-1,$$

$$= b^{\mu}a^{-\nu}z^{1+\mu-\nu}(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}J_{\nu-\mu-1}[z(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}],$$

$$a>b,\ \mathrm{Re}\,\nu>\mathrm{Re}\,\mu>-1,$$

可以这样証明：將積分号下的第二个貝塞尔函数应用 7-3(6) 式來代替，改变積分的次序，应用(24)及 7-3(6) 卽可.

(32)式的推廣式曾由巴萊(1935 a)導出，也曾由古滋达(1943)給出过. 例如，根据巴萊，有

$$(33)\quad \int_0^\infty J_\mu(bt)t^{\mu+1}\prod_{n=1}^{m}J_{\nu_n}[a_n(t^2+z_n^2)^{\frac{1}{2}}](t^2+z_n^2)^{-\frac{1}{2}\nu_n}\,dt=0,$$

$$b>a_1+a_2+\cdots+a_m,$$

$$\mathrm{Re}\,(\nu_1+\cdots+\nu_m+\tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{2})>\mathrm{Re}\,\mu>-1,$$

$$(34)\quad \int_0^\infty J_\mu(bt)t^{\mu-1}\prod_{n=1}^{m}J_{\nu_n}[a_n(t^2+z_n^2)^{\frac{1}{2}}](t^2+z_n^2)^{-\frac{1}{2}\nu_n}dt$$

$$=2^{\mu-1}b^{-\mu}\Gamma(\mu)\prod_{n=1}^{m}z_n^{-\nu_n}J_{\nu_n}(z_n a_n),$$

$$b>a_1+a_2+\cdots+a_m,$$

$$\mathrm{Re}\,(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m+\tfrac{1}{2}m+\tfrac{3}{2})>\mathrm{Re}\,\mu>0.$$

(32) 式的另一推廣式是沙湼所提出. 为了得出这一式子，先考察正整数 m 及 $\mathrm{Re}\,a>0$ 的積分

$$\int_C z^{\rho-1}J_\mu[b(z^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}](z^2+\zeta^2)^{-\frac{1}{2}\mu}(z^2-a^2)^{-m-1}H_\nu^{(1)}(az)\,dz,$$

其中 C 是一由圓 $|z|=R$ 的上部半圓及其直徑組成的閉道，在 $z=0$ 处具有刻槃. 当 R 趋近于 ∞ 而刻槃收縮为一点的时候，如 $a\geqslant b$, $\mathrm{Re}\,(\pm\nu)<\mathrm{Re}\,\rho<(2m+4)+\mathrm{Re}\,\mu$, 則圓弧对 C 的分担將消失. 將被積式展开为 (z^2-a^2) 的升冪級数可知極 $z^2=a^2$ 的留数为

$$\frac{2^{-m-1}}{m!}\left(\frac{d}{ada}\right)^m\{a^{\rho-2}J_\mu[b(a^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}](a^2+\zeta^2)^{-\frac{1}{2}\mu}H_\nu^{(1)}(aa)\}.$$

从柯西留数定理及 7-2(16) 式可知

(35) $$\int_0^\infty t^{\rho-1} J_\mu(b(t^2+\zeta^2)^{1/2}](t^2+\zeta^2)^{-1/2\mu}(t^2-a^2)^{-m-1}$$

$$\times [H_\nu^{(1)}(at)+e^{i\pi(\rho-\nu)}H_\nu^{(2)}(at)]\,dt$$

$$=\frac{\pi i}{m!}2^{-m}\left(\frac{d}{ada}\right)^m\{a^{\rho-2}J_\mu[b(a^2+\zeta^2)^{1/2}](a^2+\zeta^2)^{-1/2\mu}H_\nu^{(1)}(aa)\}.$$

$a\geqslant b$, $\operatorname{Re}(\pm\nu)<\operatorname{Re}\rho<2m+4+\operatorname{Re}\mu$, $\operatorname{Re}(ia)<0$,

$m=0, 1, 2, \cdots$

类似的公式及特殊情形，見 7-14(46)～7-14(59).

7-7-6. 麥唐納及聶却尔生公式

麥唐納及聶却尔生曾經導出了把貝塞尔函数的積表示为無窮積分的公式．实际上，麥唐納公式

(36) $$\int_0^\infty \exp[-\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}t^{-1}(z^2+Z^2)]K_\nu(zZ/t)t^{-1}\,dt$$

$$=2K_\nu(z)K_\nu(Z),$$

$$|\arg z|<\pi,\ |\arg Z|<\pi,\ |\arg(z+Z)|<\tfrac{1}{4}\pi$$

是公式

(37) $$\int_0^\infty \exp[-\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}t^{-1}(x^2+X^2)]I_\nu(xX/t)t^{-1}dt$$

$$=\begin{cases}2I_\nu(x)K_\nu(X)\\ 2K_\nu(x)I_\nu(X)\end{cases}$$

的直接推論，这一公式中用上面一式或下面一式根据 $X>x$ 或 $X<x$ 而定．我們現在用 7-2(13) 式來对正实数 x 及 X 証明公式 (37)，从而得出正的 z, Z 的公式 (36)；应用解析开拓定理就可將这个結果推廣到复数的 z, Z．令 (25) 中的 $\alpha=x$, $\beta=X$, $\gamma^2=\tfrac{1}{2}t$, 則得

(38) $$I_\nu(xX/t)$$

$$=t\exp[(x^2+X^2)/(2t)]\int_0^\infty J_\nu(xv)J_\nu(Xv)e^{-\frac{1}{2}tv^2}v\,dv.$$

將这一式代入 (37)，得

$$\int_0^\infty \exp\left[-\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}t^{-1}(x^2+X^2)\right]I_\nu(xX/t)t^{-1}\,dt$$

$$=\int_0^\infty J_\nu(xv)J_\nu(Xv)\,v\,dv\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t(1+v^2)}\,dt$$

$$=2\int_0^\infty (1+v^2)^{-1}J_\nu(xv)J_\nu(Xv)\,v\,dv$$

应用公式 7-14(57) 即可証明 (37).

黹却尔生公式为

(39) $$K_\nu(z)K_\mu(z)=2\int_0^\infty K_{\nu+\mu}(2z\,\mathrm{ch}\,t)\,\mathrm{ch}\,[(\mu-\nu)t]\,dt$$

$$=2\int_0^\infty K_{\nu-\mu}(2z\,\mathrm{ch}\,t)\,\mathrm{ch}\,[(\mu+\nu)t]\,dt,$$

$$\mathrm{Re}\,z>0.$$

这一公式的証明如下. 从 7-12(21) 式有

$$K_\nu(z)K_\mu(z)$$

$$=\tfrac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-z(\mathrm{ch}\,t+\mathrm{ch}\,v)}\,\mathrm{ch}\,(\mu t)\,\mathrm{ch}\,(\nu v)\,dt\,dv.$$

作变換 $t+v=2\zeta$, $t-v=2\eta$, 經代入簡化后得

$$K_\nu(z)K_\mu(z)=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-2z\,\mathrm{ch}\,\zeta\,\mathrm{ch}\,\eta}\,\mathrm{ch}\,[(\mu+\nu)\zeta]$$

$$\times\,\mathrm{ch}\,[(\mu-\nu)\eta]\,d\zeta\,d\eta,$$

应用 7-12(21), 即可証明 (39).

黹却尔生的另一公式 (Watson, 1944, p. 444) 为

(40) $$[J_\nu(z)]^2+[Y_\nu(z)]^2=8\pi^{-2}\int_0^\infty K_0(2z\,\mathrm{sh}\,t)\,\mathrm{ch}\,(2\nu t)\,dt,$$

$$\mathrm{Re}\,z>0.$$

对于类似的公式,主要是二个貝塞尔函数相乘積的積分表示式,見 Watson (1944, p. 445)、Chaundy (1931)、Dixon 及 Ferrar (1930, 1933)、Meijer (1935, p. 241, 1935 b, 1936, 1936 a, 1940, p. 366). 对于二貝塞尔函数積的和与差見 Buchholz (1939, 1947).

7-7-7. 关于階的積分

雷門尼强 (Watson, 1944, p. 449) 提出了一个对于实数 y 及

$a, b>0$, $\mathrm{Re}\,(\nu+\mu)>1$ 正确的公式:

$$(41)\quad \int_{-\infty}^{\infty} a^{-\mu-x}J_{\mu+x}(a)b^{-\nu+x}J_{\nu-x}(b)e^{ixy}\,dx$$
$$=(2\cos \tfrac{1}{2}y)^{\frac{1}{2}(\nu+\mu)}(a^2e^{-i\frac{1}{2}y}+b^2e^{i\frac{1}{2}y})^{-\frac{1}{2}(\nu+\mu)}e^{i\frac{1}{2}y(\nu-\mu)}$$
$$\times J_{\nu+\mu}\{[2\cos \tfrac{1}{2}y(a^2e^{-i\frac{1}{2}y}+b^2e^{i\frac{1}{2}y})]^{\frac{1}{2}}\} \qquad |y|<\pi,$$
$$=0, \qquad |y|>\pi.$$

將富里哀反演公式应用于 7-7(12)，卽可得到这一公式的証明.

柱面波函数及球面波函数分别可表示为:

$$(42)\quad K_0[(a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{\frac{1}{2}}]$$
$$=(2/\pi)\int_0^{\infty} K_{ix}(a)K_{ix}(b)\ \mathrm{ch}\,[(\pi-\phi)x]\,dx,$$

$$(43)\quad (a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{-\frac{1}{2}}e^{-ik(a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{\frac{1}{2}}}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\pi(ab)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} xe^{\pi x}H_{ix}^{(2)}(ka)H_{ix}^{(2)}(kb)\tanh(\pi x)$$
$$\times P_{-\frac{1}{2}+ix}(-\cos\phi)\,dx \qquad \mathrm{Im}\,k\leqslant 0.$$

公式(42)可从 7-7(36) 麦唐納公式中得出，公式(43)可从 7-15(41)式及留数理論中得出. 公式 (42) 是下面的克萊姆 (1940) 公式的一个特殊情形:

$$(44)\quad \int_{-\infty}^{\infty} K_{i(\xi+\eta)}(a)K_{i(\zeta+\eta)}(b)e^{(\pi-C)\eta}\,d\eta=K_{i(\xi-\zeta)}(c)e^{-\xi B-\zeta A},$$

其中 A, B, C 是以 a, b, c 为边長的三角形的角.

(42)及(43)式的另一推廣为

$$(45)\quad w^{-\nu}K_\nu(w)=\tfrac{1}{2}\Gamma(\nu)(\tfrac{1}{2}ab)^{-\nu}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}\,(\pi x)(\nu-\tfrac{1}{2}+ix)K_{\nu-\frac{1}{2}+ix}(a)I_{\nu-\frac{1}{2}+ix}(b)$$
$$\times C_{-\frac{1}{2}+ix}^{\nu}(-\cos\phi)\,dx, \qquad w=(a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{\frac{1}{2}},$$

($C_{-\frac{1}{2}+ix}^{\nu}$ 的定义見 3-15 節). 应用 7-6(3) 及留数定理卽可得到(45)式的証明.

其余的公式有

$$(46)\quad \int_0^{\infty} K_{ix}(a)\cos(xy)\,dx=\tfrac{1}{2}\pi e^{-a\,\mathrm{ch}\,y},$$

(47) $\int_0^\infty K_{ix}(a)\,\mathrm{ch}\,(\frac{1}{2}\pi x)\cos(xy)dx=\frac{1}{2}\pi\cos(a\,\mathrm{sh}\,y)$,

(48) $\int_0^\infty K_{ix}(a)\,\mathrm{sh}\,(\frac{1}{2}\pi x)\sin(xy)dx=\frac{1}{2}\pi\sin(a\,\mathrm{sh}\,y)$,

这些公式可分别从 7-12(21), 7-12(25) 及 7-12(26) 中導出. 其他的結果参看 Ramanujan (1920, 1927, p. 200, 224, 229)、Fox (1929)、MacRobert (1931, 1937)、Crum (1940).

7-8. 貝塞尔函数与勒上特函数間的关系

貝塞尔函数及修正貝塞尔函数可表示为勒上特函数的極限情形. 在勒上特函数表达式 3-2(14) 及 3-4(6) 中,分别以 $\mathrm{ch}\,(z/\nu)$ 代 z, $\cos(x/\nu)$ 代 x 就可得

$$P_\nu^{-\mu}(\mathrm{ch}\,z/\nu)\Gamma(\mu+1)$$
$$=[\tanh(\tfrac{1}{2}z/\nu)]^\mu{}_2F_1\{-\nu,1+\nu;1+\mu;-[\mathrm{sh}\,(\tfrac{1}{2}z/\nu)]^2\},$$
$$P_\nu^{-\mu}(\cos x/\nu)\Gamma(\mu+1)$$
$$=[\tan(\tfrac{1}{2}x/\nu)]^\mu{}_2F_1\{-\nu,1+\nu;1+\mu;[\sin(\tfrac{1}{2}x/\nu)]^2\}.$$

現在令 $\nu\to\infty$, 并应用 7-2(12) 及 7-2(3), 則得

(1) $$\lim_{\nu\to\infty}\nu^\mu P_\nu^{-\mu}(\mathrm{ch}\,z/\nu)=\frac{(\frac{1}{2}z)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}{}_0F_1(\mu+1;\tfrac{1}{4}z^2)=I_\mu(z),$$

(2) $$\lim_{\nu\to\infty}\nu^\mu P_\nu^{-\mu}(\cos x/\nu)=\frac{(\frac{1}{2}x)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}{}_0F_1(\mu+1;-\tfrac{1}{4}x^2)=J_\mu(x).$$

一个类似的关系式 (見 Poole, 1934) 可从公式 3-2(41) 中導出,卽

(3) $$\lim_{\mu\to\infty}\{Q_\nu^\mu[\mu/(iz)]e^{-i\mu\pi}/\Gamma(\mu)\}$$
$$=\frac{ie^{i\frac{1}{2}\nu\mu}\pi^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}z)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}{}_0F_1(\nu+\tfrac{3}{2};-z^2/4)$$
$$=ie^{i\frac{1}{2}\nu\pi}(\tfrac{1}{2}\pi z)^{\frac{1}{2}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(z).$$

类似于(1)及(2)的第二类勒上特函数的关系式或者可从(1)及 3-3(4),或者可从(2)及 3-4(13) 中推出. 这些关系式是

$$(4)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\nu\to\infty} \nu^{-\mu} e^{-i\mu\pi} Q_\nu^\mu(\operatorname{ch} z/\nu) = K_\mu(z), \\ \lim\limits_{\nu\to\infty} \nu^{\mu} Q_\nu^{-\mu}(\cos x/\nu) = -\tfrac{1}{2}\pi Y_\mu(x). \end{cases}$$

現在我們來研究一下貝塞尔函数及勒上特函数之間的几个積分关系式．將 7–7(26)式右側的超比級数与 3–2(16)的比較一下，就可得

$$(5)\qquad \Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)P_\nu^\mu(z)$$

$$= (\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}\int_0^\infty e^{-tz}K_{\nu+\frac{1}{2}}(t)t^{-\mu-\frac{1}{2}}\,dt,$$

$$\operatorname{Re} z > -1,\ \operatorname{Re}(\nu-\mu+1) > 0,\ \operatorname{Re}(\nu+\mu) < 0.$$

同理从 7–7(16) 及 3–2(41) 可得

$$(6)\qquad Q_\nu^\mu(z) = (\tfrac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}e^{i\mu\pi}\int_0^\infty e^{-tz}I_{\nu+\frac{1}{2}}(t)t^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt,$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ \operatorname{Re} z > 1.$$

在公式 (5) 及 (6) 中，分別应用揮普耳公式 3–3(13) 及 3–3(14) 卽可得四个另外的積分表示式:

$$(7)\qquad \Gamma(\nu-\mu+1)Q_\nu^\mu(z) = e^{i\mu\pi}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-tz(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}}K_\mu(t)t^\nu\,dt,\qquad \operatorname{Re}(\nu\pm\mu) > -1,$$

$$(8)\qquad \Gamma(-\nu-\mu)P_\nu^\mu(z) = (z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu}\int_0^\infty e^{-tz(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}}I_{-\mu}(t)t^\nu\,dt,$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu) < 0,$$

$$(9)\qquad \Gamma(\nu+\mu+1)P_\nu^{-\mu}(z)$$

$$= (z^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-tz(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}}I_\mu(t)t^\nu\,dt,$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,$$

$$(10)\qquad \Gamma(\nu+\mu+1)P_\nu^{-\mu}(\cos\theta) = \int_0^\infty e^{-t\cos\theta}J_\mu(t\sin\theta)t^\nu\,dt,$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ 0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi.$$

应用 3–3(1)，从(8)式可得(9)式，应用 3–4(1)，从(9)式可得 (10)式．

用包含勒上特函数的積分來表示第一类貝塞尔函数的一个簡單例子就是泊松積分公式的盖根堡推廣式:

(11) $$2^{\nu}\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(n+2\nu)i^{n}z^{-\nu}J_{\nu+n}(z)/[n!\Gamma(2\nu)]$$
$$=\int_{0}^{\pi}e^{iz\cos\phi}C_{n}^{\nu}(\cos\phi)(\sin\phi)^{2\nu}\,d\phi,$$
$$\operatorname{Re}\nu>-1/2,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

这可从沙湼公式 7-10(5) 式中推出. 在这一公式中將 $\cos\phi$ 代 γ, 二边都乘以 $C_{n}^{\nu}(\cos\phi)(\sin\phi)^{2\nu}$, 逐項对 ϕ 積分,而后应用 3-15(17) 卽可.

还有一个类似公式可从加法定理 7-15(17) 中導出,这一公式是

(12) $$(2\pi/z)^{1/2}i^{n}(\sin\phi)^{\nu-1/2}C_{n}^{\nu}(\cos\phi)J_{\nu+n}(z)$$
$$=\int_{0}^{\pi}e^{iz\cos\theta\cos\phi}J_{\nu-1/2}(z\sin\theta\sin\phi)C_{n}^{\nu}(\cos\theta)(\sin\theta)^{\nu+1/2}\,d\theta,$$
$$\operatorname{Re}\nu>-1/2,\ |\arg z|<\pi,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

这些类型的其他公式見 Meijer (1934, 1938)、MacRobert (1936, 1940)、Bailey (1935 a).

最后,我們來提一下魏塔克尔的回綫積分,它是与亨克尔積分 7-3(8) 有关的,

(13) $$\pi^{3/2}J_{\nu}(z)=(1/2z)^{1/2}e^{-1/2i\pi(\nu+1/2)}\int_{\infty e^{i\delta}}^{(-1+,1+)}e^{izt}Q_{\nu-1/2}(t)\,dt,$$
$$-1/2\pi+\delta<\arg z<1/2\pi+\delta,\ |\delta|<1/2\pi.$$

要証明这一公式,設圍道全部位于圓 $|t|=1$ 的外面;于是我們可以根据 3-2(5), 將 $Q_{\nu-1/2}(t)$ 展开为 t 的降冪級数, 并应用 7-3 節的同样方法. 从(13)可得第二亨克尔函数的一个对应公式:

(14) $$\pi^{3/2}H_{\nu}^{(2)}(z)\cos(\nu\pi)$$
$$=(1/2z)^{1/2}e^{1/2(\nu+1/2)i\pi}\int_{\infty e^{-i\delta}}^{(-1+,1+)}e^{izt}P_{\nu-1/2}(t)\,dt,$$
$$-1/2\pi+\delta<\arg z<1/2\pi+\delta,\ |\delta|<1/2\pi,$$

在这里我們应用到公式 7-2(6) 及 3-3(8).

斯高 (1933) 曾提出了一个將勒上特函数 $P_\nu(\cos\theta)$ 展开为貝塞尔函数的級数的公式:

$$(15)\quad P_\nu(\cos\theta)=(\theta/\sin\theta)^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\theta)(\nu+1/2)^{-m}J_m[(\nu+1/2)\theta],$$

其中 $a_m(\theta)$ 是初等函数，在 $0\leqslant\operatorname{Re}\theta<\pi$ 上正則. 特别是: $a_0=1$, $a_1=2^{-3}(\operatorname{ctn}\theta-\theta^{-1})$, 等等. (15) 式在 $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0-\varepsilon$ 上一致收斂，此处 $\varepsilon>0$, 且

$$\theta_0=2(2^{1/2}-1)\pi=(0.828\cdots)\pi.$$

这一公式的導出如下. 在 7-10(15) 中令 $s=1, z=\theta, \tau^2=1-t^2/\theta^2$, $\nu=-1/2$, 可得

$$2\cos t=(1/2\,\pi)^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}2^{1-m}(\theta^2-t^2)^m e^{-m+1/2}J_{m-1/2}(\theta)/m!,$$

因此

$$2(\cos t-\cos\theta)=(1/2\,\pi)^{1/2}\sum_{m=1}^{\infty}(\theta^2-t^2)^m 2^{1-m}\theta^{1/2-m}J_{m-1/2}(\theta)/m!.$$

如果在米勒積分式 3-7(27) 中应用这一展开式，逐項積分并应用公式 7-3(3), 卽可得出 (15).

在上面提到的斯高的著作中，还有关于 $P_\nu(\operatorname{ch}\zeta)$, $Q_\nu(\cos\theta)$, $Q_\nu(\operatorname{ch}\zeta)$ 的类似展开式，分别在 450, 449 及 448 頁上.

7-9. 貝塞尔函数的零点

这一問題在華特生著作 (卽貝塞尔函数論——譯者) 的第 15 章中有詳細討論. 但因該書于 1922 年初版后又得出了很多結果，而这些結果在華特生著作的 1944 年再版本中并沒有增入. 这里，我們將簡略地討論一下比較重要的結果.

一般結果

从微分方程的一般理論 (Ince, 1944, 第 10 章) 中，可得下面的敍述:

a) 7-2(1) 或 7-2(11) 的任一解的任一零点都是一階零点，唯一可能的例外是原点.

b) 7-2(1)的二个綫性独立的实数解的实零点互相分开，此处实数解定义为

$$aJ_\nu(x)+bY_\nu(x),\ a,\ b,\ \nu\ \text{实数},\ x\ \text{正实数}.$$

第一类貝塞尔函数

对于函数 $J_\nu(z)$ 的特殊情形，可証明下面的定理.

$J_\nu(z)$ 及 $J'_\nu(z)$ 在 ν 为实数时的零点是关于坐标軸对称的.

对于实数的 ν, $J_\nu(z)$ 具有無窮多的实零点 (Watson, 1944, p. 478; Wilson, 1939).

如 $\gamma_{\nu,1}$, $\gamma_{\nu,2}\cdots$为 $J_\nu(x)$ 的正零点，按大小次序排列，则

$$0<\gamma_{\nu,1}<\gamma_{\nu+1,1}<\gamma_{\nu,2}<\gamma_{\nu+1,2}<\gamma_{\nu,3}<\cdots\qquad \nu>-1,$$

(Watson, 1944, p. 479).

如 $\nu>-1$, 且 A, B, C, D 为实数，满足条件 $AD-BC\neq 0$, 则 $AJ_\nu(x)+BxJ'_\nu(x)$ 及 $CJ_\nu(x)+DxJ'_\nu(x)$ 的正零点互相分隔，而且这种类型的函数中沒有一个可以具有 $x=0$ 以外的重零点 (Watson, 1944, p. 480).

如 A 及 B 为实数，$\nu>-1$, 则函数

$$AJ_\nu(x)+BzJ'_\nu(z)$$

只具有实零点，但在 $A/B+\nu<0$ 时它有二个純虚数零点 (Watson, 1944, p. 482). 这些正零点的漸近公式見 Moore (1920) 的著作.

对于 $\nu>1$, 函数 $J_{-\nu}(z)$ 具有無窮多个实零点及 $2[\nu]$ 个共軛复零点，其中在 $[\nu]$ 为奇整数时有二个是純虚零点(Hurwitz 定理) (不同的証明見 Watson, 1944, p. 483; Obreschkoff, 1929; Pólya, 1929; Falkenberg, 1932; Hille Szegö, 1943).

希尔勃 (1922) 所提出的赫威兹定理的推廣为: 函数

$AJ_\nu(z)+BJ_{-\nu}(z)$, (A, B 实数, $B\neq 0$, $\nu>0$) 的主枝，在 $[\nu]$ 为偶数时具有 $[\nu]$ 个复零点，其实部是正的；如 $[\nu]$ 为奇数，则有

$[\nu]-1$ 或 $[\nu]+1$ 个实部为正的复零点，根据 $A/B\gtrless 0$ 而定.

$z^{-\nu}J_\nu(z)$ 在虚軸及

$$\operatorname{Re} z = m\pi + (\tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\nu + \tfrac{1}{4})\pi$$

所决定的直綫之間的零点数当 m 足夠大时等于 m, 而 $J_\nu(z)$ 的所有零点都位于帶 $|\operatorname{Im} z|<A$ 之內，此处 A 在 ν 有界时有界.

設 γ_ν, γ'_ν 及 γ''_ν 分别为 $J_\nu(x)$, $J'_\nu(x)$ 及 $J''_\nu(x)$ 的最小正零点；則 (Watson, 1944, p. 485)

$$[\nu(\nu+2)]^{1/2}<\gamma_\nu<[2(\nu+1)(\nu+3)]^{1/2},$$

$$[\nu(\nu+2)]^{1/2}<\gamma'_\nu<[2\nu(\nu+1)]^{1/2},\ \nu>0,$$

$$[\nu(\nu-1)]^{1/2}<\gamma''_\nu<[\nu^2-1]^{1/2},\ \nu>1.$$

关于后面零点的更好界限及結果見 Mayr (1935).

特列柯米(1948)曾提出了公式

$$\gamma_\nu=\nu+1855757\,\nu^{1/3}+103315\,\nu^{-1/3}+O(\nu^{-1}),$$

及对第一类第二类貝塞尔函数的其他零点適用的一些类似公式. 有关于 $J_\nu(x)$ 及 $J'_\nu(x)$ 的零点的進一步研究，可参看 Bickley (1943)、Bickley & Miller, (1945)、Gatteschi (1950)、Olver (1950).

西格耳曾証明(1929) $J_\nu(z)$在 ν 为有理数、z 为不等于零的一个代数数时不能为一个代数数. 这一定理証明了布吉特所說 $J_\nu(z)$ 及 $J_{\nu+m}(z)$ $(m=1, 2, 3, \cdots)$ 除了 0 以外不能有公共零点的推測 (Watson, 1944, p. 484).

把 $J_\nu(z)$ 的零点 ν_n 作为 z 固定下的 ν 的函数的研究曾由庫命提出过(1936). 他証明对于 z 的正实数值，ν_n 是單階实零点，漸近地接近于負整数(还可参看 Gray 及 Mathews, 1922, p. 88).

对于固定的 $\nu>-1$, 变量 $x\geqslant 0$, $J_\nu(x)$ 的圖象类似于阻尼振动曲綫. 軸上下“半波”的逐段面積組成一遞降序列(Cooke, 1937).

整函数的因式分解定理(Copson, 1935, p. 158) 可把 $z^{-\nu}J_\nu(z)$ 表示为一个無窮乘積(Watson, 1944, p. 497). 我們來考察对于一

个固定的$\nu\neq-1, -2, -3, \cdots$, $z^{-\nu}J_\nu(z)$在半平面 $\operatorname{Re} z>0$ 上的一些零点(它們是关于实軸对称的),并將它們按非降实部排列(如有零点位于虛軸上,則只考慮具有正的虛部的那些零点). 这一序列以 $\gamma_{\nu,n}(n=1, 2, 3, \cdots)$ 表示. 于是有

$$(1)\qquad \Gamma(\nu+1)(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}J_\nu(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2\gamma_{\nu,n}^{-2}).$$

一个类似的展开式为(Buchholz, 1947)

$$(2)\qquad 2\Gamma(\nu)(\tfrac{1}{2}z)^{1-\nu}J'_\nu(z)=\prod_{n=1}^{\infty}[1-z^2(\gamma'_{\nu,n})^{-2}].$$

此处 $\gamma'_{\nu,n}$ 是由 $z^{1-\nu}J'_\nu(z)$ 的零点所組成的序列, 就像 $\gamma_{\nu,n}$ 是由 $z^{-\nu}J_\nu(z)$ 的零点所組成的序列一样.

作出 (1) 的对数導数并应用 7-2(51) 式,得

$$(3)\qquad J_{\nu+1}(z)/J_\nu(z)=-2z\sum_{n=1}^{\infty}(z^2-\gamma_{\nu,n}^2)^{-1}.$$

因此可導出下面一个对 $|z|<\gamma_\nu$ 正确的冪級数

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}J_{\nu+1}(z)/J_\nu(z)=\sum_{n=1}^{\infty}S_{2n,\nu}z^{2n-1},$$

这里

$$(5)\qquad S_{2l,\nu}=\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{\nu,m}^{-2l},$$

特别是(Nielsen, 1904, p. 360),

$$(6)\qquad S_{2,\nu}=2^{-2}/(\nu+1),\ S_{4,\nu}=2^{-4}/[(\nu+1)^2(\nu+2)],$$

其他类似的展开式及关系式見 7-15 節、Forsyth (1921)、Buchholz (1947).

第二类貝塞尔函数

最早的有关第二类貝塞尔函数的零点的結論是謝希特林定理(Watson, 1944, p. 482), 根据这一定理, $Y_0(z)$ 的主枝除了实零点以外不具有正实部的零点. 这一結果曾由希尔勃(1922)加以推廣. 当 $[\nu]$ 为偶数时, $Y_\nu(z)$ 在 $|\arg z|\leqslant\tfrac{1}{2}\pi$ 上具有 $[\nu]$ 个复零

点．当 $[\nu]$ 为奇数时，则 $Y_\nu(z)$ 在同一范圍內根据 $\cos(\nu\pi)\gtreqless 0$ 而具有 $[\nu]-1$ 个或 $[\nu]+1$ 个复零点．这样，$Y_{2n}(z)$ 及 $Y_{2n+1}(z)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 在 $|\arg z|\leqslant \frac{1}{2}\pi$ 上具有 $2n$ 个复零点．

$Y_n(z)$（n 为一整数）在左半平面中具有复零点，分布在所有分枝上，在右半平面中具有复零点，分布在主枝以外的所有分枝上．此外，$Y_\nu(z)$ 僅当 ν 为有理数而不是一整数时具有正实零点．在后一情形下，$Y_\nu(z)$ 在主枝上具有正实零点而僅当 ν 为有理非整数时才具有其他实零点．在后一情形下，$Y_\nu(z)$ 只在 7-11(41) 式中的 $2m\nu$ 为一整数的那一分枝上具有实零点 (Hillmann, 1949)．

$J_\nu(z)$ 和 $Y_\nu(z)$ 的綫性組合的零点研究可参看 Watson, 1944, 第十五章）; Hilb (1922); Hillmann (1949)．类似于布吉特假設的一个定理見 Banerjee (1936)．

对于第一类与第二类貝塞尔函数的積的組合，我們有下面的定理(Gray-Mathews, 1922, p. 82)：如 ν 为实数而 a, b 为正数，则

$$J_\nu(ax)\,Y_\nu(bx)-J_\nu(bx)\,Y_\nu(ax)$$

是 x 的一个單值偶函数，它的所有零点都是实数而單階(还可参看 Jahnke-Emde, 1945, p. 204; 类似的組合見 Carslaw 与 Jaeger, 1940; Kline, 1948)．

第三类貝塞尔函数

实数非負 ν 的第一类第二类亨克尔函数的主枝上零点的研究曾由 Falkenberg 与 Hilb (1916), 及 Falkenberg (1932) 提出过，結果是：$H_\nu^{(1)}(z)$, $\nu\geqslant 0$ 在 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 上沒有零点．对于 $\nu\geqslant 0$, $H_\nu^{(1)}$ 在 $-\pi<\arg z<0$ 上的零点，以及 $H_\nu^{(2)}$ 在 $0<\arg z<\pi$ 上的零点，其位置关于虛軸成軸对称地分布．

除了当 $\nu=(2k-1)+\frac{1}{2}$, $(k=1, 2, 3, \cdots)$ 以外，沒有純虛数的零点，而在 $\nu=(2k-1)+\frac{1}{2}$ 时，也只有一个純虛数零点．

$H_\nu^{(1),(2)}(z)$ 在主枝上的零点总数等于

$0,\qquad$ 如 $0\leqslant\nu<\frac{3}{2}$,

$2k-1$, 如 $\nu=(2k-1)+\frac{1}{2}$,

$2k$, 如 $(2k-1)+\frac{1}{2}<\nu<2k+\frac{1}{2}$,

$k=1, 2, 3, \cdots$.

类似于布吉特假設的一个定理是: $H_{\nu}^{(1),(2)}(x)$ 及 $H_{\nu+m}^{(1),(2)}(x)$ 在ν为实数而 $\geqslant -1$ 且 $m=1, 2, 3, \cdots$时不具有公共的零点. (Banerjee, 1935).

第三类修正貝塞尔函数

对于 $\nu\geqslant 0$, $K_{\nu}(z)$ 在 $|\arg z|\leqslant\frac{1}{2}\pi$ 上不具有零点. 在 $|\arg z|<\pi$ 上的零点数是一偶整数,極近于$\nu-\frac{1}{2}$, 除非$\nu-\frac{1}{2}$是一整数,此时零点数卽为$\nu-\frac{1}{2}$ (Watson, 1944, p. 511).

当$\nu+1$为正实数, m为正整数时, $K_{\nu}(z)$ 及 $K_{\nu+m}(z)$ 沒有公共零点.

如設 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为給定的不具有公共零点的解析函数,使 $g(z)/f(z)$ 是一半純函数,且对于 $\operatorname{Re} z\geqslant 0$, 有 $\operatorname{Re}[g(z)/f(z)]\geqslant 0$, 則函数

$$F(z)=f(z)K_{\nu}'(z)-g(z)K_{\nu}(z)$$

在右半复平面上沒有零点(Erdélyi 及 Kermack, 1945).

把 $K_{\nu}(z)$ 及 $I_{\nu}(az)K_{\nu}(bz)-K_{\nu}(az)I_{\nu}(bz)$ 作为ν的函数时,它們所有的零点都是純虛数,而且具有無窮多的零点 (Gray-Mathews, 1922, p. 88); 还可参看 Pólya (1926), Bruijn (1950). 在 Polya 的著作中,对应于方程 (iii) 的函数 $G(z)$ 是 $2K_{iz}(\lambda)$.

7-10. 任意函数的級数与積分表示式

7-10-1. 紐孟級数

一个紐孟級数就是下面形式的級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nJ_{\nu+n}(z). \tag{1}$$

根据展开式 7-2(2)，顯然可知它的收斂圓与冪級数 $\Sigma a_n(\frac{1}{2}z)^{\nu+n}/\Gamma(\nu+n+1)$ 的完全一样.

以冪級数給出的函数 $f(z)$ 的紐孟級数展开式可以很容易地求得. 为此，我們先給出 z 的冪的紐孟級数

$$(2)\qquad (\tfrac{1}{2}z)^\nu=\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+2n)\Gamma(\nu+n)J_{\nu+2n}(z)/n!,$$

ν 不是負整数. 这一式可以这样來証明：以冪級数(見 7-2(2))代替 $J_{\nu+n}(z)$，并將右側部分按 z 的冪排列. 所有的系数，除了 z^ν 的以外，都等于零.

今設

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^l.$$

如 z 的每一次冪都用它的紐孟級数(2)代替，則得

$$f(z)=z^{-\nu}\sum_{l=0}^{\infty}b_l 2^{l+\nu}\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+l+2m)\Gamma(\nu+l+m)J_{\nu+l+m}(z)/m!,$$

因此

$$f(z)=z^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_n J_{\nu+n}(z),$$

其中

$$(3)\qquad a_n=2^{\nu+n}(\nu+n)\sum_{s=0}^{\leqslant\frac{1}{2}n}2^{-2s}\Gamma(\nu+n-s)b_{n-2s}/s!.$$

反过來，b_l 可以 a_n 表示为(Nielsen, 1904, p. 271)

$$(4)\qquad b_l\Gamma(\nu+l+1)=2^{-l-\nu}\sum_{m=0}^{\leqslant\frac{1}{2}l}(-1)^m\binom{\nu+l}{m}a_{l-2m}.$$

(3)式的和在某些情形下有較簡單的表达式. 例如取

$$f(z)=e^{iz\gamma}=\sum_{l=0}^{\infty}(i\gamma)^l z^l/l!$$

則从(3)經一些运算后可得

$$a_n=i^n\gamma^n 2^{\nu+n}\Gamma(\nu+n+1)$$
$$\times{}_2F_1(-\tfrac{1}{2}n,\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n;\ 1-n-\nu;\ \gamma^{-2})/n!,$$

或，应用盖根堡多項式 3-15(8)，得沙湼公式

$$(5)\qquad z^{\nu}e^{i\gamma z}=2^{\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}i^{n}(\nu+n)C_{n}^{\nu}(\gamma)J_{\nu+n}(z),\qquad \nu\neq 0,\ -1,\ -2,\cdots$$

貝塞尔函数展开为紐孟級数的展开式为

$$(6)\qquad (\tfrac{1}{2}az)^{\mu-\nu}J_{\nu}(az)\Gamma(\nu+1)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_{2}F_{1}(-n,\mu+n;\nu+1;a^{2})\times\Gamma(\mu+n)(\mu+2n)J_{\mu+2n}(z)/n!$$

这一式可用上面的同样方法來証明．我們可將 (6) 式的左边展开为 z 的冪級数而后应用 (3)．同样，可得隆美耳函数 7-5(69) 的紐孟級数:

$$(7)\qquad s_{\mu,\nu}(z)=2^{\mu+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu+1+2n)\Gamma(\mu+1+n)}{n![(2n+1+\mu)^{2}-\nu^{2}]}J_{\mu+1+2n}(z).$$

因此，应用 7-5(82) 至 7-5(84) 式，可得恩乔函数，韋勃函数，斯特拉夫函数的类似公式．其他結果可參看 7-15; Nielsen, 1904, 第 20 章; Watson, 1944, 第 16 章; Baudoux, 1945, 1946.

將实变数 x 的函数 $f(x)$ 展开为紐孟級数的理論以下面的積分公式[見 7-14(32)]为根据:

$$\int_{0}^{\infty}t^{-1}J_{\nu+2n+1}(t)J_{\nu+2m+1}(t)\,dt=\begin{cases}0 & m\neq n\\(4n+2\nu+2)^{-1} & m=n,\ \nu>-1.\end{cases}$$

因此，我們在形式上可導出下面的展开式

$$(8)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2\nu+2+4n)J_{\nu+2n+1}(x)\int_{0}^{\infty}t^{-1}f(t)J_{\nu+2n+1}(t)dt,\qquad \nu>-1.$$

这一展开式的理論曾由 Wilkins (1948, 1950) 提出，$\nu=0$ 的特殊情形早曾由 Webb, Kapteyn, Bateman (Watson, 1944, p. 533), Korn (1931) 及 Titchmarsh (1948, p. 352) 研究过(紐孟級数的逐項積分可參看 Hardy, 1926).

下面形式的級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\mu+\frac{1}{2}n}(z) J_{\nu+\frac{1}{2}n}(z) \tag{9}$$

称为第二类紐孟級数．如果二貝塞尔函数的積以 7-2(48) 式的冪級数代替，則得

$$z^{-\nu-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\mu+\frac{1}{2}n}(z) J_{\nu+\frac{1}{2}n}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l, \tag{10}$$

式中

$$\begin{aligned} &\Gamma(\nu+1+\tfrac{1}{2}n)\Gamma(\mu+1+\tfrac{1}{2}n)b_l \\ &\quad = 2^{-l-\mu-\nu} \sum_{m=1}^{<\frac{1}{2}l} (-1)^m \binom{l+\nu+\mu}{m} a_{l-2m}, \end{aligned} \tag{11}$$

因此 (Nielsen, 1904, p. 292)，

$$\begin{aligned} a_n = {} & 2^{\nu+\mu+n}(\nu+\mu+n) \\ & \times \sum_{s=0}^{<\frac{1}{2}n} 2^{-2n} b_{n-2s} \\ & \times \frac{\Gamma(\nu+\mu+n-s)\Gamma(\nu+1-s+\frac{1}{2}n)\Gamma(\mu+1-s+\frac{1}{2}n)}{s!\,\Gamma(\nu+\mu+n-2s+1)}, \end{aligned} \tag{12}$$

只要 $\mu, \nu, \mu+\nu$ 都不是負整数．公式(12)把一冪級数展开为紐孟級数，可以証明，这样得到的紐孟級数在冪級数收斂圓的內部一致收斂．

一个簡單的例子就是 z 的冪的展开式，从(12)式可以很容易得到

$$\begin{aligned} &\frac{(\frac{1}{2}z)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)} \\ &\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu+\mu+2n}{\nu+\mu+n} \binom{\nu+\mu+n}{n} J_{\nu+n}(z) J_{\mu+n}(z). \end{aligned} \tag{13}$$

(其他的結果見 Nielsen, 1904, 第 21 章; Watson, 1944, p. 525; Banerjee, 1939) 包含任意个貝塞尔函数的積的級数可参看 Stevenson (1928).

紐孟級数的一种修正形式是級数

(14) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n J_{\nu+n}(z)$.

从 7-3(5) 的回綫積分，我們立即可得下面的方程

(15) $$(s^2-\tau^2)^{-\frac{1}{2}\nu} J_\nu[z(s^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}}] = \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2} z\tau^2)^n s^{-\nu-n} J_{\nu+n}(zs)/n!.$$

令 $s=1$, $\tau^2=1-\lambda^2$, 可得貝塞尔函数的乘法公式

(16) $$J_\nu(\lambda z)=\lambda^\nu \sum_{n=0}^{\infty} [\tfrac{1}{2} z(1-\lambda^2)]^n J_{\nu+n}(z)/n!.$$

因此，令 λ 趋近于 0 就可導出类似于(2)的公式

(17) $$(\tfrac{1}{2} z)^\nu=\Gamma(\nu+1) \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2} z)^n J_{\nu+n}(z)/n!$$

公式(17)可以把一冪級数轉变为上面指出的級数．我們得

(18) $$\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{2l}=z^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n J_{\nu+n}(z)$$

此处

(19) $$a_n=\sum_{s=0}^{n} \frac{\Gamma(\nu+s+1)}{(n-s)!} 2^{2s-n+\nu} b_s,$$

因此有

(20) $$\Gamma(\nu+n+1) b_n=\sum_{s=0}^{n} (-1)^s 2^{-\nu-n-s} a_{n-s}/s!$$

(Nielsen, 1904, 第 21 章).

7-10-2. 卡普頓級数

形如

(21) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}[(\nu+n)z],$$

的級数称为卡普頓級数．从不等式(Watson, 1944, p. 270)

(22) $$|J_a(az)| \leqslant \left(1+\left|\frac{\sin a\pi}{a\pi}\right|\right) |z^a e^{a(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} [1+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}]^{-a}|,$$

顯然可知(21)在

$$(23)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n[w(z)]^n$$

絕对收斂的整个区域内收斂，这里

$$(24)\quad w(z)=ze^{(1-z^2)^{1/2}}/[1+(1-z^2)^{1/2}].$$

將 z 的冪展开为卡普頓級数的展开式为

$$(25)\quad (\tfrac{1}{2}z)^l=(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}(\nu+l)^2$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\nu+l+n)(\nu+l+2n)^{-\nu-l-1}J_{\nu+l+2n}[(\nu+l+2n)z]/n!$$

ν 不为負整数．这一式可將右側的每一貝塞尔函数用它的冪級数 7-2(2) 代替后得到証明．級数 (25) 在整个区域

$$(26)\quad |w(z)|<1$$

内收斂．

用 (25) 式可將一冪級数轉变为卡普頓級数．如果在

$$(27)\quad f(z)=\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l.$$

中，z 的每一次冪都用它的卡普頓級数(25)代替，經运算后，可得

$$(28)\quad f(z)=z^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}[(\nu+n)z],$$

这里 ν 不为負整数，且

$$(29)\quad a_n=\tfrac{1}{2}\sum_{s=0}^{<\frac{1}{2}n}(\nu+n-2s)^2\Gamma(\nu+n-s)(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}n)^{2s-n-\nu-1}.$$

(29) 式中的級数当

$$|w(z)|<1 \text{ 及 } |w(z)|<|w(\rho)|$$

时絕对收斂，此处 ρ 为 (27) 的收斂半徑．

第二类卡普頓級数就是形如下式的級数

$$(30)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}n}[(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\rho+n)z]J_{\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}n}[(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\rho+n)z].$$

可以証明(Nielsen, 1904, p. 307)：

$$(31)\quad (\tfrac{1}{2}z)^{\nu+\rho}=(\nu+\rho)\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\rho)\times\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu+\rho+n-1}{n}(\nu+\rho+2n)^{-\nu-\rho-1}\times J_{\nu+n}[(\nu+\rho+2n)z]J_{\rho+n}[(\nu+\rho+2n)z],$$

式中 $\nu, \rho, \nu+\rho$ 都不是負整数.

现在,令

$$(32)\quad f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^l,$$

那么 (Nielsen, 1904, p. 308),我們有

$$(33)\quad f(z)=z^{-\frac{1}{2}(\nu+\rho)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n J_{\frac{1}{2}(\nu+n)}[(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\rho+n)z]\times J_{\frac{1}{2}(\rho+n)}[(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}n)z],$$

这里

$$(34)\quad (\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}n)^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\rho+n+1}2^{-\frac{1}{2}(\nu+\rho+n)}a_n =\sum_{s=0}^{<\frac{1}{2}n}\frac{(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\rho+n-2s)\Gamma(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}n-s+1)\Gamma(\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}n-s+1)}{(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\rho+n)^{-s}}\times\binom{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\rho+n-s-1}{s}b_{n-2s}.$$

其他的結果和例子可參看 Nielsen (1904, 第 22, 23 章)、Watson (1944, 第 17 章)、Bailey (1932)、Budden (1926).

7-10-3. 許洛米耳級数

如下形式的級数

$$(35)\quad f(x)=\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m J_0(mx)$$

曾由許洛米耳研究过. 对于实变数 x 的一个任意函数,在区間 $(0, \pi)$ 上有一展开定理(Grag & Mathews, 1922, p. 40; Watson, 1944, p. 619).

对于在区間 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上具有有界变分的連續導数的函数

$f(x)$，有一个展开式 (35)，其中

(36) $$a_0=2f(0)+2\pi^{-1}\int_0^{\pi} v\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(v\sin\phi)\,d\phi\,dv,$$

(37) $$a_m=2\pi^{-1}\int_0^{\pi} v\cos(mv)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(v\sin\phi)\,d\phi\,dv.$$

廣义的許洛米耳級数是

(38) $$\Sigma[a_m J_\nu(mx)+b_m \boldsymbol{H}_\nu(mx)](\tfrac{1}{2}mx)^{-\nu}.$$

这些展开式的理論可在華特生 (1944, 第 19 章) 及聶尔生 (1904, p. 134) 的著作中找到. 在柯克 (1928) 的著作中，把華特生著作中的結果作了部分的簡化和推廣. 这个理論以下面的公式为基礎:

(39) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\nu(z\sin\theta)(\sin\theta)^{\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu}\,d\theta$$
$$=2^{-\nu}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)z^{\nu-1}\sin z,\qquad -1<\operatorname{Re}\nu<\tfrac{1}{2},$$

(40) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \boldsymbol{H}_\nu(z\sin\theta)(\sin\theta)^{\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu}\,d\theta$$
$$=2^{-\nu}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)z^{\nu-1}(1-\cos z),\qquad -\tfrac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<\tfrac{1}{2},$$

这二公式可以很容易地从方程 7-7(5) 及 7-7(9) 中令 $\mu=\nu$, $\rho=-\nu-\frac{1}{2}$ 而導出. 現在，讓我們假設展开式

(41) $$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}[a_m J_\nu(mx)+b_m \boldsymbol{H}_\nu(mx)](\tfrac{1}{2}mx)^{-\nu},$$
$$-\tfrac{1}{2}<\nu<\tfrac{1}{2},\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

是正确的，以 $x\sin\theta$ 代 x，乘式的二边以

$$(\sin\theta)^{2\nu+1}(\sin\theta)^{-2\nu},$$

从 0 至 $\frac{1}{2}\pi$ 对 θ 積分，并应用 (39) 及 (40). 这样，我們在形式上得到

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(x\sin\theta)(\sin\theta)^{2\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu}\,d\theta$$
$$=\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)\sum_{m=1}^{\infty}[a_m\sin(mx)+b_m(1-\cos mx)]/(mx),$$

因此，对于展开式(41)的系数，

(42) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)a_m = m\pi^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(mt)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(t\sin\theta)(\sin\theta)^{2\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu}\,d\theta\,dt,$$

(43) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)b_m = -m\pi^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(mt)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(t\sin\theta)(\sin\theta)^{2\nu+1}(\sin\theta)^{-2\nu}\,d\theta\,dt.$$

以 (42) 及 (43) 为系数的級数 (41) 称为 $f(x)$ 的許洛米耳級数.

在上面提到过的柯克的著作中，証明了具有系数 (42) 及 (43) 的級数 (41) 在任一不包括 0, $\pm\pi$ 的区間内正确的函数类就是可適用富里哀級数理論的函数类．此外，还建立了类似于富里哀級数中 Riemann-Lebesgue, Parseval, Riesz-Fischer 定理的几条定理．关于这一方面，可参看 Cooke (1927, 1929, 1930b, 1936)、Wilton (1927)、Jesmanowicz (1938)、Wilkins (1950a).

現在我們來看許洛米耳展开式(41)的几个簡單例子．取 $f(x)=(ax)^{-\nu}\boldsymbol{H}_\nu(ax)$ (a 任意的)．这是 x 的奇函数 [与 7-5(55) 比較]，因此，在 (41) 中有 $a_m=0$. 由于 (40)，我們从 (43) 可得

$$\pi b_m = -(-1)^m 2^{-\nu+1} m\sin(a\pi)/(m^2-a^2),$$

因此，

(44) $$\pi(ax)^{-\nu}\boldsymbol{H}_\nu(ax)$$
$$= -2^{-\nu+1}\sin(a\pi)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m}{m^2-a^2}(\tfrac{1}{2}mx)^{-\nu}\boldsymbol{H}_\nu(mx),$$
$$-\pi<x<\pi,\ \mathrm{Re}\,\nu>-\tfrac{3}{2}.$$

以 $\sin(a\pi)$ 除(44)的二边，并使 a 趋近于零，我們得[見 7-5(55)]:

(45) $$\pi^{-\frac{1}{2}}/\Gamma(\nu+\tfrac{3}{2})+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}mx)^{-\nu-1}\boldsymbol{H}_\nu(mx)=0,$$
$$0<x<\pi,\ \mathrm{Re}\,\nu>-\tfrac{3}{2}.$$

現在令 $f(x)=(ax)^{-\nu}J_\nu(ax)$．这里 $f(x)$ 是 x 的偶函数，因此，$b_m=0$. 从 (42) 及 (39) 得

$$\pi a_m = -(-1)^m 2^{-\nu+1}\sin(a\pi)m^2/[a(m^2-a^2)],$$

因此，

$$(46)\quad \pi(ax)^{-\nu}J_\nu(ax) = -2^{-\nu+1}a^{-1}\sin(a\pi)$$
$$\times\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m^2(m^2-a^2)^{-1}(\tfrac{1}{2}mx)^{-\nu}J_\nu(mx),$$
$$0<x<\pi,\ \mathrm{Re}\,\nu>-\tfrac{1}{2}.$$

在 (46) 中介 a 趋近于零，则得

$$(47)\quad \tfrac{1}{2}/\Gamma(\nu+1)+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}mx)^{-\nu}J_\nu(mx)=0,$$
$$-\tfrac{1}{2}<\nu\leqslant\tfrac{1}{2}\ 及\ 0<x<\pi\ 或\ \nu>\tfrac{1}{2}\ 及\ 0<x\leqslant\pi.$$

从(45)及(47)式可知，有着具有非零系数的廣义許洛米耳級数，它收斂而它的和几乎在每一处都等于零．这样的級数称为**零級数**(Nielsen, 1904, 第 25 章; Fox, 1926; Cooke, 1930)．零級数的存在表明了一个函数的許洛米耳展开式，如果存在的話，那幷不是唯一的．

許洛米耳及有关級数的其他結果及例子，見 Pennell (1932)、Bennet (1932)、Doetsch (1935)、Erdélyi (1937)、Kober (1935)、Watson (1931)、Infield, et. al. (1947)、Magnus & Oberhettinger (1948, p. 58–62)．(38)式中的貝塞尔函数及斯特拉夫函数用它們的平方來代替的展开式曾由 Thielmann (1934) 給出．

7-10-4. 富里哀-貝塞尔及狄尼級数

設 $\nu>-1$，幷設 $x=\gamma_m$ 及 $x=\gamma_n$ 为 $J_\nu(x)$ 的二个正零点［在这种情形下，$J_\nu(x)$ 的所有零点都是实数；見 7-9 節］．于是，应用 7-2(56)，从 7-14(9) 及 7-14(10) 分别可得

$$(48)\quad \int_0^1 tJ_\nu(\gamma_m t)J_\nu(\gamma_n t)\,dt=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \tfrac{1}{2}[J_{\nu+1}(\gamma_m)]^2 & n=m\end{cases}$$

同理，如 λ_m 及 λ_n 为函数 $zJ'_\nu(z)+aJ_\nu(z)$ 的二个正零点(見 7-9 節)，其中 $\nu\geqslant-\tfrac{1}{2}$，$a$ 为任一已知常数，则从公式 7-14(9)，7-14(10)，7-2(54) 及 7-2(55) 可得

$$(49)\quad \int_0^1 tJ_\nu(\lambda_m t)J_\nu(\lambda_n t)\,dt=0 \qquad n\neq m.$$

$$=\tfrac{1}{2}\lambda_m^{-2}\{\lambda_m^2[J_\nu'(\lambda_m)]^2+(\lambda_m^2-\nu^2)[J_\nu(\lambda_m)]^2\}, \qquad n=m.$$

積分公式 (48) 表示了貝塞尔函数的一种正交性質，而且可用以將实变数 x 的任意函数 $f(x)$ 展开为如下的形式

$$(50)\quad f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m J_\nu(\gamma_m x),$$

且

$$(51)\quad \tfrac{1}{2}[J_{\nu+1}(\gamma_m)]^2 a_m=\int_0^1 tf(t)J_\nu(\gamma_m t)\,dt,$$

式中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots$都是函数 $J_\nu(x)$的正零点，按大小的升序排列．这一展开式称为函数 $f(x)$ 的富里哀-貝塞尔展开式．

同样，从(49)式我們得

$$(52)\quad f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m J_\nu(\lambda_m x),$$

且

$$(53)\quad \{\lambda_m^2[J_\nu'(\lambda_m)]^2+(\lambda_m^2-\nu^2)[J_\nu(\lambda_m)]^2\}b_m$$
$$=2\lambda_m^2\int_0^1 tJ_\nu(\lambda_m t)f(t)\,dt,$$

式中 $\nu\geqslant -\tfrac{1}{2}$，且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$都是函数$zJ_\nu'(z)+aJ_\nu(z)$的正零点，按大小的升序排列．这一展开式称为 $f(x)$ 的狄尼展开式．

富里哀-貝塞尔展开式及狄尼展开式的理論見 Watson (1944, 第 18 章)，下面是一定理：設 $t^{1/2}f(t)$ 在 $(0, 1)$ 上为絕对可積，并設 $\nu>-\tfrac{1}{2}$；則如 $0<x<1$，展开式 (50) 及 (52) 和普通的富里哀級数具有同样性态 (并見 Moore, 1911; Stone, 1927; MacRobert, 1931; Titchmarsh, 1946, p. 70)．$x=1$ 及 $x=0$ 附近的性态見 Watson (1944, p. 594, 602, 615) 及 Young (1941)；吉布斯現象見 Cooke (1927), Wilton (1928), Moore (1930)．类似于 (50) 及 (52) 但包含貝塞尔函数平方的級数見 Thielmann (1934)．

例如，令 $f(x)=x^\nu$，則从 (50)，(53) 及 7-7(1) 可得

(54) $$x^{\nu}=\sum_{m=1}^{\infty} 2J_{\nu}(\gamma_m x)/[\gamma_m J_{\nu+1}(\gamma_m)], \qquad 0\leqslant x<1,$$

(55) $$x^{\nu}=\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\lambda_m J_{\nu}(\lambda_m x) J_{\nu+1}(\lambda_m)}{(\lambda_m^2-\nu^2)[J_{\nu}(\lambda_m)]^2+\lambda_m^2[J'_{\nu}(\lambda_m)]^2}, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\ a+\nu>0.$$

如 $f(x)=J_{\nu}(xz)$，則从 7-14(9) 可得

(56) $$\frac{J_{\nu}(xz)}{J_{\nu}(z)}=2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m J_{\nu}(\gamma_m x)}{(\gamma_m^2-z^2)J_{\nu+1}(\gamma_m)}, \qquad 0\leqslant x<1,$$

(57) $$J_{\nu}(xz) =2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2 J_{\nu}(\lambda_m x)[\lambda_m J_{\nu+1}(\lambda_m)J_{\nu}(z)-zJ_{\nu}(\lambda_m)J_{\nu+1}(z)]}{(\lambda_m^2-z^2)\{\lambda_m^2[J'_{\nu}(\lambda_m)]^2+(\lambda_m^2-\nu^2)[J_{\nu}(\lambda_m)]^2\}}, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

其他例子見 7-15 節.

适用于一个正的有限区間的貝塞尔函数級数展开式，曾由 Titchmarsh 提出 (1923 a, 13-14)(还可参看 MacRobert, 1931).

設 $f(x)$ 定义于 $a<x<b$，$(a>0)$. 則 $f(x)$ 的展开式为

(58) $$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m[J_{\nu}(\gamma_m x)Y_{\nu}(\gamma_m b)-Y_{\nu}(\gamma_m x)J_{\nu}(\gamma_m b)],$$

式中 $z=\gamma_m$ 是

$$J_{\nu}(az)Y_{\nu}(bz)-Y_{\nu}(az)J_{\nu}(bz)=0$$

的第 m 个正根，且

(59) $$\{[J_{\nu}(\gamma_m a)]^2-[J_{\nu}(\gamma_m b)]^2\}a_m =\tfrac{1}{2}\pi\gamma_m^2[J_{\nu}(\gamma_m a)]^2 \times\int_a^b [J_{\nu}(\gamma_m t)Y_{\nu}(\gamma_m b)-Y_{\nu}(\gamma_m t)J_{\nu}(\gamma_m b)]tf(t)\,dt.$$

廣义狄里克雷級数

如下形式的級数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_n s)^{1/2}K_{\nu}(\lambda_n s),$$

$$s=\sigma+i\tau,\ \lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots,\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

曾由格林伍特(1941)加以研究．当 $\nu=\frac{1}{2}$ 时，它簡化为狄里克雷級数

$$f(s)=(\tfrac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s}.$$

有关这些級数的各种定理，見 Greenwood (1941).

7-10-5. 任意函数的積分表示式

許洛米耳級数(見 7-10-3) 的理論提供了一个把任意函数表示为函数 J_ν 及 H_ν 的級数的方法．同样的方法也可用以將一任意函数表为包含貝塞尔及有关函数的積分．在下面，我們总假設 $f(t)$ 是实变数 t 的实数值函数，而且在 $t=x$ 的鄰域內具有有界变分．如 $f(t)$ 在 $t=x$ 处間断，則在下面的公式中 $f(x)$ 应以 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ 代替．在下面有几个展开公式中，所加于 ν 的条件曾由齐雷(1949 a)加以松弛．

这种样子的表示式中最簡單的类型就是亨克尔積分公式:

$$f(x)=\int_0^\infty J_\nu(tx)t\,dt\int_0^\infty f(v)J_\nu(vt)\,v\,dv, \tag{60}$$

这一式当 $\nu\geqslant-\frac{1}{2}$ 且 $\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}|f(t)|\,dt$ 收斂时正确，或当 $\nu>-1$ 及

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}|f(t)|\,dt \text{ 和 } \int_0^1 t^{\nu+1}|f(t)|\,dt$$

都收斂时正确．表达式(60)的理論曾由 Watson(1944, 第 14 章), Titchmarsh (1948, p. 240)及 Tricomi 徹底討論过．倘使 $\nu=\pm\frac{1}{2}$, 則 (60) 式分別簡化为富里哀正弦及余弦積分．

哈台 (1925) 曾給亨克尔積分作了一个推廣，他給出了下面的公式

$$f(x)=\int_0^\infty G_\nu(xt)\,t\,dt\int_0^\infty F_\nu(vt)vf(v)\,dv, \tag{61}$$

式中

$$\begin{aligned}F_\nu(z)&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{1}{2}z)^{\nu+2a+2m}}{\Gamma(a+m+1)\Gamma(a+m+\nu+1)}\\&=\frac{2^{2-\nu-2a}s_{\nu+2a-1,\,\nu}(z)}{\Gamma(a)\Gamma(\nu+a)},\end{aligned} \tag{62}$$

(63) $G_\nu(z)=\cos(a\pi)J_\nu(z)+\sin(a\pi)Y_\nu(z)$,

上式在下述条件下正确 (Cooke, 1925):

(i) $a>-1,\ a+\nu>-1,\ \nu+2a<3/2,\ |\nu|\leqslant 3/2$,

(ii) $t^\sigma f(t)$ 在 $(0,\delta)$ 上可積, $\sigma=\min(1+\nu+2a,\ 1/2)$,

$\delta>0$,

(iii) $t^{1/2}f(t)$ 在 (δ,∞) 上可積.

展开公式 (61) 的理論由 Cooke (1925) 給出.

哈台公式的特殊情形

如 $a=0$, 則得 $F_\nu(z)=J_\nu(z)$, $G_\nu(z)=J_\nu(z)$. 这一情形简化为亨克尔公式 (60). 如 $a=1/2$, 則得 $F_\nu(z)=\boldsymbol{H}_\nu(z)$, $G_\nu(z)=Y_\nu(z)$. 这就導致

(64) $$f(x)=\int_0^\infty Y_\nu(xt)\,t\,dt\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\nu(vt)vf(v)\,dv.$$

如 $a=-1/2$, 則得

(65) $$f(x)=-\int_0^\infty Y_\nu(xt)t\,dt\int_0^\infty\left[\frac{(vt)^{\nu-1}\pi^{-1/2}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1/2)}-\boldsymbol{H}_\nu(vt)\right]vf(v)\,dv.$$

如 $\nu=1/2$, 我們得

$$F_\nu(z)=(1/2\pi z)^{-1/2}C_{2a+1}(z),\quad G_\nu(z)=(1/2\pi z)^{-1/2}\sin(z-a\pi),$$

式中 $C_{2a+1}(z)$ 是楊氏函数 7-5(85).

韋勃及沃尔公式:

(66) $$f(x)=\int_a^\infty\frac{J_\nu(tx)Y_\nu(at)-J_\nu(at)Y_\nu(tx)}{[J_\nu(at)]^2+[Y_\nu(at)]^2}\,t\,dt$$
$$\times\int_0^\infty[J_\nu(vt)Y_\nu(at)-Y_\nu(vt)J_\nu(at)]vf(v)\,dv,$$

上式当 ν 为实数且 $\int_0^\infty t^{1/2}|f(t)|\,dt$ 收斂时正确. 如 $\nu=\pm 1/2$, 它简化为富里哀正弦積分 (Titchmarsh, 1923; Watson, 1944, p. 468).

另一个由 Titchmarsh (1925) 提出的公式是

(67) $f(x)=\pi\int_0^\infty \Gamma_\nu(xt)t\,dt\int_0^\infty (d/dt)[t\Lambda_\nu(vt)]vf(v)\,dv,$

式中

(68) $\Gamma_\nu(z)=\sin(a\pi)\{[J_\nu(z)]^2-[Y_\nu(z)]^2\}$
$\quad -2\cos(a\pi)J_\nu(z)Y_\nu(z),$

(69) $\Lambda_\nu(z)$
$$=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+a+\frac{1}{2})\pi^{-\frac{1}{2}}z^{2\nu+2a+2m}}{\Gamma(a+m+1)\Gamma(\nu+a+m+1)\Gamma(2\nu+a+m+1)},$$

上面的公式在下述条件下有效(Cooke, 1925):

(i) $a>-1,\ a+2\nu>-1,\ 1>a+\nu\geqslant-\frac{1}{2},\ |\nu|\leqslant1,$

(ii) $t^\sigma f(t)$ 在 $(0,\delta)$ 上可積, $\sigma=\min(1+2\nu+2a,1),$

(iii) $tf(t)$ 在 (δ,∞) 上可積, $\delta>0.$

展开式 (67) 的理論曾由 Cooke (1925) 給出。

(68) 和 (69) 式的特殊情形是

$a=0,\quad \Gamma_\nu(z)=-2J_\nu(z)Y_\nu(z),\quad \Lambda_\nu(z)=[J_\nu(z)]^2,$

$a=-\nu,\quad \Lambda_\nu(z)=J_\nu(z)J_{-\nu}(z),$

$a=-2\nu,\quad \Lambda_\nu(z)=[J_{-\nu}(z)]^2.$

包含貝塞尔函数的拉普拉斯積分的一个推廣曾由梅杰(1940, p.599, 702) 提出,如下:

(70) $f(x)=(\pi i)^{-1}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}I_\nu(xt)(xt)^{\frac{1}{2}}dt\int_0^\infty K_\nu(tv)(tv)^{\frac{1}{2}}f(v)\,dv.$

由于 $K_\nu(z)=K_{-\nu}(z)$, 7-2(14), 我們还可以有

(71) $f(x)=(2\pi i)^{-1}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}[I_\nu(xt)+I_{-\nu}(xt)](xt)^{\frac{1}{2}}dt$
$\quad \times\int_0^\infty K_\nu(vt)(vt)^{\frac{1}{2}}f(v)\,dv,$

(并見 Boas, 1942). 如 $\nu=\pm\frac{1}{2}$, (71) 式簡化为拉普拉斯公式.

任意函数的其他積分表示式有:

(72) $f(x)=-\frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{i\infty}tJ_t(x)\,dt\int_0^\infty H_t^{(2)}(v)v^{-1}f(v)\,dv,$

(Kontorovich 及 Lebedev, 1938),

$$(73)\quad f(x)=\pi^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{1}{2}\pi(x+t)}K_{i(x+t)}(a)\,dt \times\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{1}{2}\pi(t+v)}K_{i(t+v)}(a)f(v)\,dv,\qquad a>0,$$

(Grum, 1940),

$$(74)\quad f(x)=\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{J_{it}(e^{x})+J_{-it}(e^{x})}{\operatorname{sh}(\pi t)}\,t\,dt \times\int_{-\infty}^{\infty}[J_{it}(e^{v})+J_{-it}(e^{v})]f(v)\,dv,$$

(Titchmarsh, 1946, p. 83),

$$(75)\quad xf(x)=2\pi^{-2}\int_{0}^{\infty}K_{it}(x)t\operatorname{sh}(\pi t)dt\int_{0}^{\infty}K_{it}(v)f(v)\,dv,$$

(Lebedev, 1946),

$$(76)\quad f(x)=(\pi i)^{-1}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}tK_{t}(x)dt\int_{0}^{\infty}v^{-1}f(v)I_{t}(v)dv,$$

(Lebedev, 1947). 其他例子見 Hardy (1927) 及 Hardy 与 Titchmarsh (1933).

包含貝塞尔函数的对偶積分方程

在有些关于势和电磁或声的輻射理論的問題中，未知函数在区間$(0,\infty)$的一部分上滿足一个積分方程，而在区間的其他部分上滿足另一積分方程 (Nicholson, 1924; King, 1935, 1936; Sommerfeld, 1943). 方程对 (Titchmarsh, 1948, p. 337; Busbridge, 1938)

$$(77)\quad \begin{aligned}&\int_{0}^{\infty}y^{a}f(y)J_{\nu}(xy)dy=g(x), && 0<x<1,\\ &\int_{0}^{\infty}f(y)J_{\nu}(xy)dy=0, && x>1\end{aligned}$$

具有解为

(78) $\Gamma(\frac{1}{2}a)f(x)$

$$=(2x)^{1-\frac{1}{2}a}\int_0^1 t^{1+\frac{1}{2}a}J_{\nu+\frac{1}{2}a}(xt)\,dt\int_0^1 g(vt)v^{\nu+1}(1-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}dv,$$

其中,假設 $a>0$.

在 $a=1,\ \nu=1,\ g(x)=1$ 的特殊情形下,解为

$$\tfrac{1}{2}\pi f(x)=x^{-2}\sin x-x^{-1}\cos x.$$

方程对(Tranter, 1951),

$$(79)\qquad \begin{aligned}&\int_0^\infty y\Phi(y)J_\nu(xy)\,dy=f(x), && 0<x<1,\\ &\int_0^\infty \Phi(y)J_\nu(xy)\,dy=F(x), && x>1,\end{aligned}$$

具有解

$$(80)\qquad \Phi(y)=H(y)+(\tfrac{1}{2}\pi y)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 t^{\nu+\frac{1}{2}}L(t)J_{\nu+\frac{1}{2}}(ty)\,dt,$$

其中

$$(81)\qquad H(y)=F(1)J_{\nu+1}(y)+y\int_1^\infty xF(x)J_\nu(xy)\,dx,$$

$$(82)\qquad L(t)=(2/\pi)t^{-2\nu}\int_0^t x^{\nu+1}[f(x)-\int_0^\infty yH(y)J_\nu(xy)\,dy]\times(t^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

方程对

$$(83)\qquad \begin{aligned}&\int_0^\infty \Phi(y)J_\nu(xy)\,dy=G(x), && 0<x<1,\\ &\int_0^\infty y\Phi(y)J_\nu(xy)\,dy=g(x), && x>1\end{aligned}$$

的解为

$$(84)\qquad \Phi(y)=K(y)+(\tfrac{1}{2}\pi y)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 t^{\nu+\frac{1}{2}}\xi(t)J_{\nu-\frac{1}{2}}(ty)\,dt,$$

其中

$$(85)\qquad K(y)=\int_1^\infty xg(x)J_\nu(xy)\,dx,$$

$$(86)\qquad \tfrac{1}{2}\pi t^{2\nu}\xi(t)=M(0)+t\int_0^t (t^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}M'(x)\,dx,$$

(87)　$$M(x)=x^{\nu}G(x)-x^{\nu}\int_0^{\infty}K(y)J_{\nu}(xy)\,dy.$$

第二部分　公式

7-11. 初等关系及各种公式

球面貝塞尔函数

在(1)至(13)式中，$n=0,1,2,\cdots$

(1)　$$J_{n+½}(z)$$
$$=(½\pi z)^{-½}\Big[\sin(z-½n\pi)\sum_{m=0}^{\leq ½n}(-1)^m(n+½,\,2m)(2z)^{-2m}$$
$$+\cos(z-½n\pi)\sum_{m=0}^{\leq ½n-½}(-1)^m(n+½,2m+1)(2z)^{-2m-1}\Big],$$

(2)　$$Y_{n+½}(z)=(½\pi z)^{-½}\Big[\sin(z-½n\pi)$$
$$\times\sum_{m=0}^{\leq ½n-½}(-1)^m(n+½,\,2m+1)(2z)^{-2m}$$
$$-\cos(z-½n\pi)\sum_{m=0}^{\leq ½n}(-1)^m(n+½,\,2m)(2z)^{-2m}\Big],$$

(3)　$$H^{(1)}_{n+½}(z)=(½\pi z)^{-½}i^{-n-1}e^{iz}\sum_{m=0}^{n}i^m(n+½,\,m)(2z)^{-m},$$

(4)　$$H^{(2)}_{n+½}(z)=(½\pi z)^{-½}i^{n+1}e^{-iz}\sum_{m=0}^{n}(-i)^m(n+½,\,m)(2z)^{-2m},$$

(5)　$$J_{-n-½}(z)=(-1)^{n+1}Y_{n+½}(z);$$
$$Y_{-n-½}(z)=(-1)^nJ_{n+½}(z),$$

(6)　$$H^{(1)}_{-n-½}(z)=i(-1)^nH^{(1)}_{n+½}(z);$$
$$H^{(2)}_{-n-½}(z)=-i(-1)^nH^{(2)}_{n+½}(z).$$

(7)　$$J_{n+½}(z)=(-1)^n(½\pi z)^{-½}z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{\sin z}{z},$$

(8)　$$Y_{n+½}(z)=-(-1)^n(½\pi z)^{-½}z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{\cos z}{z}.$$

(9) $$H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=-i(-1)^n(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{e^{iz}}{z}.$$

(10) $$H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=i(-1)^n(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{e^{-iz}}{z},$$

(11) $$\psi_n(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^nz^n\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{\sin z}{z},$$

(12) $$\zeta^{(1)}_n(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=-i(-1)^nz^n\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{e^{iz}}{z},$$

(13) $$\zeta^{(2)}_n(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=i(-1)^nz^n\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{e^{-iz}}{z}.$$

(14) $$J_{\frac{1}{2}}(z)=Y_{-\frac{1}{2}}(z)=(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}\sin z,$$

(15) $$Y_{\frac{1}{2}}(z)=-J_{-\frac{1}{2}}(z)=-(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}\cos z,$$

(16) $$I_{\frac{1}{2}}(z)=(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sh} z,$$

(17) $$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z)=-iH^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(z)=-i(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}e^{iz},$$

(18) $$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(z)=iH^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(z)=i(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}e^{-iz}.$$

修正貝塞尔函数的遞推关系及導微公式

(19) $$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m[z^\nu I_\nu(z)]=z^{\nu-m}I_{\nu-m}(z),$$

(20) $$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m[z^{-\nu}I_\nu(z)]=z^{-\nu-m}I_{\nu+m}(z),$$

(21) $$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m[z^\nu K_\nu(z)]=(-1)^mz^{\nu-m}K_{\nu-m}(z),$$

(22) $$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m[z^{-\nu}K_\nu(z)]=(-1)^mz^{-\nu-m}K_{\nu+m}(z).$$

(23) $$I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)=2\nu z^{-1}I_\nu(z),$$

(24) $$I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z)=2I'_\nu(z),$$

(25) $$K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)=-2\nu z^{-1}K_\nu(z),$$

(26) $$K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)=-2K'_\nu(z).$$

隆司基式及有关公式

$$W(w_1,w_2)=w_1w_2'-w_1'w_2.$$

(27)　$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -2(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi)$,

(28)　$W(J_\nu, Y_\nu) = 2(\pi z)^{-1}$,

(29)　$W(J_\nu, H_\nu^{(1),(2)}) = \pm 2i(\pi z)^{-1}$,

(30)　$W(H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}) = -4i(\pi z)^{-1}$,

(31)　$W(I_\nu, I_{-\nu}) = -2(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi)$,

(32)　$W(I_\nu, K_\nu) = -z^{-1}$,

(33)　$J_\nu(z)J_{-\nu+1}(z) + J_{-\nu}(z)J_{\nu-1}(z) = 2(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi)$,

(34)　$H_\nu^{(1)}(z)H_{\nu-1}^{(2)}(z) - H_{\nu-1}^{(1)}(z)H_\nu^{(2)}(z) = -4i(\pi z)^{-1}$,

(35)　$J_\nu(z)Y_{\nu-1}(z) - Y_\nu(z)J_{\nu-1}(z) = 2(\pi z)^{-1}$,

(36)　$J_{\nu-1}(z)H_\nu^{(1)}(z) - J_\nu(z)H_{\nu-1}^{(1)}(z) = 2(\pi i z)^{-1}$,

(37)　$J_\nu(z)H_{\nu-1}^{(2)}(z) - J_{\nu-1}(z)H_\nu^{(2)}(z) = 2(\pi i z)^{-1}$,

(38)　$I_\nu(z)I_{-\nu+1}(z) - I_{-\nu}(z)I_{\nu-1}(z) = -2(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi)$,

(39)　$K_{\nu+1}(z)I_\nu(z) + K_\nu(z)I_{\nu+1}(z) = z^{-1}$.

变量 $ze^{i\pi m}$ 的函数（m 为整数）

(40)　$J_\nu(ze^{im\pi}) = e^{im\pi\nu}J_\nu(z)$,

(41)　$$Y_\nu(ze^{im\pi}) = e^{-im\pi\nu}Y_\nu(z) + 2i\frac{\sin(m\pi\nu)}{\sin(\nu\pi)}\cos(\pi\nu)J_\nu(z),$$

(42)　$$H_\nu^{(1)}(ze^{im\pi}) = -\frac{\sin[(m-1)\pi\nu]}{\sin(\pi\nu)}H_\nu^{(1)}(z) - e^{-i\pi\nu}\frac{\sin(m\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}H_\nu^{(2)}(z),$$

(43)　$$H_\nu^{(2)}(ze^{im\pi}) = \frac{\sin[(m+1)\pi\nu]}{\sin(\pi\nu)}H_\nu^{(2)}(z) + e^{i\pi\nu}\frac{\sin(m\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}H_\nu^{(1)}(z),$$

(44)　$I_\nu(ze^{im\pi}) = e^{im\pi\nu}I_\nu(z)$,

(45)　$$K_\nu(ze^{im\pi}) = e^{-im\pi\nu}K_\nu(z) - i\pi\frac{\sin(m\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}I_\nu(z).$$

如 ν 为整数而等于 n，则

$$\lim_{\nu\to n}\frac{\sin(l\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} = l(-1)^{n(l+1)},$$

式中 l 分别等于 $m-1$, m 或 $m+1$.

7-12. 積分表示式

貝塞尔系数

(1) $$\pi J_n(z)=\int_0^\pi \cos(z\sin\phi-n\phi)\,d\phi,$$

(2) $$\pi J_n(z)=i^{-n}\int_0^\pi e^{iz\cos\phi}\cos(n\phi)\,d\phi,$$

(3) $$\pi J_{2n}(z)=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(z\sin\phi)\cos(2n\phi)\,d\phi,$$

(4) $$\pi J_{2n+1}(z)=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin(z\sin\phi)\sin[(2n+1)\phi]\,d\phi.$$

在(1)至(4)式中, $n=0, 1, 2, \cdots$

泊松積分

(5) $$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})J_\nu(z)=2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(z\sin\phi)(\cos\phi)^{2\nu}d\phi,$$

(6) $$=\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}e^{iz\sin\phi}(\cos\phi)^{2\nu}\,d\phi,$$

(7) $$=\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_{-1}^{1}e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt,$$

(8) $$=2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_0^1(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(zt)\,dt,$$

(9) $$=\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_0^\pi e^{iz\cos\phi}(\sin\phi)^{2\nu}\,d\phi,$$

(10) $$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})I_\nu(z)=\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^\nu\int_{-1}^{1}e^{-zt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt.$$

在(5)至(10)式中, $\mathrm{Re}\,\nu>-\tfrac{1}{2}$.

希英公式

(11) $$\pi Y_\nu(z)=e^{i\frac{1}{2}\nu\pi}\Big\{i\int_0^\pi e^{-iz\cos t}\cos(\nu t)\,dt$$

$$-\int_0^\infty e^{iz\,\mathrm{ch}\,t}[\mathrm{ch}(\nu t-i\nu\pi)+e^{-i\nu\pi}\mathrm{ch}(\nu t)\,dt\Big\},$$

$$0<\arg z<\pi$$

米勒-沙涅公式

$$(12)\quad \Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)J_\nu(x)=2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}x)^{-\nu}\int_1^\infty (t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\sin(xt)\,dt,$$

$$(13)\quad \Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)Y_\nu(x)=-2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}x)^{-\nu}\int_1^\infty (t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\cos(xt)\,dt,$$

上面二个公式中，$x>0,\ -\tfrac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\tfrac{1}{2}$.

$$(14)\quad \pi J_\nu(x)=2\int_0^\infty \sin(x\operatorname{ch}t-\tfrac{1}{2}\nu\pi)\operatorname{ch}(\nu t)\,dt,$$

$$(15)\quad \pi Y_\nu(x)=-2\int_0^\infty \cos(x\operatorname{ch}t-\tfrac{1}{2}\nu\pi)\operatorname{ch}(\nu t)\,dt,$$

在公式(14)及(15)中，$x>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1$.

$$(16)\quad \pi J_\nu(x)=\int_0^\infty e^{-\nu t}\sin(x\operatorname{ch}t-\tfrac{1}{2}\nu\pi)\,dt+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(x\sin t-\nu t)\,dt,\qquad x>0,\ \operatorname{Re}\nu\geqslant 0.$$

許拉弗里公式的推廣 (Lambe, 1931)

$$(17)\quad \pi\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}\nu}J_\nu[(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}]=\int_0^\pi e^{y\cos t}\cos(x\sin t-\nu t)\,dt-\sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-\nu t}e^{-y\operatorname{ch}t-x\operatorname{sh}t}\,dt,\qquad \operatorname{Re}(x+y)>0,$$

$$(18)\quad \pi\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}\nu}Y_\nu[(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}]=\int_0^\pi e^{y\cos t}\sin(x\sin x-\nu t)\,dt-\int_0^\infty (e^{\nu t+y\operatorname{ch}t}+e^{-\nu t-y\operatorname{ch}t}\cos\nu\pi)e^{-x\operatorname{sh}t}\,dt,$$

$$\operatorname{Re}x>\operatorname{Re}y>0.$$

修正亨克尔函数

$$(19)\quad \Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)K_\nu(z)=\pi^{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}\int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,dt,$$

$$\operatorname{Re}z>0,\ \operatorname{Re}\nu<\tfrac{1}{2},$$

$$(20)\quad \Gamma(\tfrac{1}{2}+\nu)K_\nu(z)=\pi^{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^{\nu}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}t}(\operatorname{sh}t)^{2\nu}\,dt,$$

$$\operatorname{Re}z>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2},$$

(21) $K_\nu(z)=\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch} t}\operatorname{ch}(\nu t)\,dt,\qquad \operatorname{Re} z>0.$

(22) $\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})K_\nu(z)=(\tfrac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}z^\nu e^{-z}\int_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-\frac{1}{2}}(1+\tfrac{1}{2}t)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt,$

$\operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2}.$

(23) $K_\nu(az)=\tfrac{1}{2}a^\nu\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z(t+a^2t^{-1})}t^{-\nu-1}\,dt,$

$\operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Re}(a^2z)>0,$

(24) $K_\nu(az)=\tfrac{1}{2}e^{i\frac{1}{2}\nu\pi}a^\nu\int_0^\infty e^{i\frac{1}{2}z(t-a^2t^{-1})}\,t^{-\nu-1}\,dt,$

$\operatorname{Im} z>0,\ \operatorname{Im}(a^2z)>0,$

(25) $K_\nu(x)\cos(\tfrac{1}{2}\nu\pi)=\int_0^\infty\cos(x\operatorname{sh}t)\operatorname{ch}(\nu t)\,dt,$

(26) $K_\nu(x)\sin(\tfrac{1}{2}\nu\pi)=\int_0^\infty\sin(x\operatorname{sh}t)\operatorname{sh}(\nu t)\,dt,$

在公式(25)及(26)中，$x>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1.$

(27) $K_\nu(z)=\pi^{-\frac{1}{2}}(2z)^\nu\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\int_0^\infty(t^2+z^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}\cos t\,dt,$

$\operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2},\ |\arg z|<\tfrac{1}{2}\pi.$

亨克尔函数

(28) $i\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)H_\nu^{(1)}(z)=2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}\int_1^\infty e^{izt}(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,dt,$

$\operatorname{Im} z>0,\ \operatorname{Re}\nu<\tfrac{1}{2},$

(29) $-i\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)H_\nu^{(2)}(z)=2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}\int_1^\infty e^{-izt}(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}dt,$

$\operatorname{Im} z<0,\ \operatorname{Re}\nu<\tfrac{1}{2},$

(30) $i\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)H_\nu^{(1)}(z)$

$=(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}2\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty t^{-2\nu}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{iz(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}\,dt,$

$\operatorname{Im} z>0,\ \operatorname{Re}\nu<\tfrac{1}{2}.$

(31) $-i\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)H_\nu^{(2)}(z)$

$=2\pi^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z)^{-\nu}\int_0^\infty t^{-2\nu}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-iz(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}\,dt,$

$\operatorname{Im} z<0,\ \operatorname{Re}\nu<\tfrac{1}{2},$

(32) $\Gamma(\nu+\frac{1}{2})H_\nu^{(1)}(z)=(\frac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}e^{i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)}$

$$\times\int_0^{\infty e^{i\delta}}e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}(1+\tfrac{1}{2}itz^{-1})^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt,$$

$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ |\delta|<\frac{1}{2}\pi,\ \delta-\frac{1}{2}\pi<\arg z<\delta+\frac{3}{2}\pi.$

(33) $\Gamma(\nu+\frac{1}{2})H_\nu^{(2)}(z)=(\frac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}e^{-i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)}$

$$\times\int_0^{\infty e^{i\delta}}e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}(1-\tfrac{1}{2}itz^{-1})^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt,$$

$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ |\delta|<\frac{1}{2}\pi,\ -3\pi/2+\delta<\arg z<\frac{1}{2}\pi+\delta.$

巴尼斯表示式

(34) $2\pi^2H_\nu^{(1)}(z)$

$$=-e^{-i\frac{1}{2}\nu\pi}\int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty}\Gamma(-\nu-s)\Gamma(-s)(-\tfrac{1}{2}iz)^{\nu+2s}\,ds,$$

$|\arg(-iz)|<\frac{1}{2}\pi,$

(35) $2\pi^2H_\nu^{(2)}(z)=e^{i\frac{1}{2}\nu\pi}\int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty}\Gamma(-\nu-s)\Gamma(-s)(\frac{1}{2}iz)^{\nu+2s}\,ds,$

$|\arg(iz)|<\frac{1}{2}\pi,$

c 是任一大于 $\operatorname{Re}\nu$ 的正数.

(36) $2\pi iJ_\nu(x)=\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(-s)[\Gamma(\nu+s+1)]^{-1}(\frac{1}{2}x)^{\nu+2s}\,ds,$

$x>0,\ \operatorname{Re}\nu>0,$

(37) $\pi^{5/2}H_\nu^{(1)}(z)=-e^{i(z-\nu\pi)}\cos(\nu\pi)(2z)^\nu$

$$\times\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(-s)\Gamma(-2\nu-s)\Gamma(\nu+s+\tfrac{1}{2})(-2iz)^s\,ds,$$

$|\arg(-iz)|<3\pi/2,\ 2\nu$ 不为奇整数.

(38) $\pi^{5/2}H_\nu^{(2)}(z)=e^{-i(z-\nu\pi)}\cos(\nu\pi)(2z)^\nu$

$$\times\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(-s)\Gamma(-2\nu-s)\Gamma(\nu+s+\tfrac{1}{2})(2iz)^s\,ds,$$

$|\arg(iz)|<3\pi/2,\ 2\nu$ 不为奇整数.

(39) $2\pi^2iK_\nu(z)=(\frac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}e^{-z}\cos(\nu\pi)$

$$\times\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(s)\Gamma(\tfrac{1}{2}-s-\nu)\Gamma(\tfrac{1}{2}-s+\nu)(2z)^s\,ds,$$

$|\arg z|<3\pi/2,\ 2\nu$ 不为奇整数.

用有关函数表示的積分式

(40) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(z\cos\phi)\cos\nu\phi\, d\phi$

$=\pi[4\cos(\tfrac{1}{2}\nu\pi)]^{-1}[J_\nu(z)+J_{-\nu}(z)]$

$=-\nu\sin(\tfrac{1}{2}\nu\pi)s_{-1,\nu}(z)$

$=\pi[4\sin(\tfrac{1}{2}\nu\pi)]^{-1}[E_\nu(z)-E_{-\nu}(z)],$

(41) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(z\cos\phi)\cos\nu\phi\, d\phi$

$=\pi[4\sin(\tfrac{1}{2}\nu\pi)]^{-1}[J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)]$

$=\cos(\tfrac{1}{2}\nu\pi)s_{0,\nu}(z)$

$=-\pi[4\cos(\tfrac{1}{2}\nu\pi)]^{-1}[E_\nu(z)+E_{-\nu}(z)],$

(42) $\int_0^{\pi} \cos(z\sin\phi)\cos\nu\phi\, d\phi=-\nu\sin(\nu\pi)s_{-1,\nu}(z),$

(43) $\int_0^{\pi} \cos(z\sin\phi)\sin\nu\phi\, d\phi=-\nu(1-\cos\nu\pi)s_{-1,\nu}(z),$

(44) $\int_0^{\pi} \sin(z\sin\phi)\sin\nu\phi\, d\phi=\sin(\nu\pi)s_{0,\nu}(z),$

(45) $\int_0^{\pi} \sin(z\sin\phi)\cos\nu\phi\, d\phi=(1+\cos\nu\pi)s_{0,\nu}(z),$

(46) $\int_0^{\infty} e^{nt-z\,\mathrm{sh}\,t}\, dt=\tfrac{1}{2}[S_n(z)-\pi E_n(z)-\pi Y_n(z)],$

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \mathrm{Re}\, z>0,$

(47) $\int_0^{\infty} e^{-nt-z\,\mathrm{sh}\,t}\, dt=\tfrac{1}{2}(-1)^{n+1}[S_n(z)+\pi E_n(z)+\pi Y_n(z)],$

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \mathrm{Re}\, z>0,$

(48) $S_{\mu,\nu}(z)$

$=z^\mu\int_0^\infty e^{-tz}{}_2F_1(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu;\ \tfrac{1}{2};-t^2)dt,$

$\mathrm{Re}\, z>0,$

(49) $S_{\mu,\nu}(z)=z^{\mu+1}$

$\times\int_0^\infty te^{-tz}{}_2F_1(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu;\ \tfrac{3}{2};\ -t^2)dt,$

$\mathrm{Re}\, z>0,$

(50) $S_{0,\nu}(z)=\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{ch}(\nu t)\,dt,$

(51) $\nu S_{0,\nu}(z)=z\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{sh}\,(\nu t)\,\mathrm{ch}\,t\,dt,$

(52) $S_{1,\nu}(z)=z\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{ch}\,(\nu t)\,\mathrm{ch}\,t\,dt.$

在(50)至(52)式中，$\mathrm{Re}\,z>0$.

7-13. 漸近展开式

7-13-1. 大的变数

(1) $$H_\nu^{(1)}(z)=(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}e^{i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)}\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu,m)(-2iz)^{-m}+O(|z|^{-M})\right],$$
$$-\pi<\arg z<2\pi.$$

(2) $$H_\nu^{(2)}(z)=(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}e^{-i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)}\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu,m)(2iz)^{-m}+O(|z|^{-M})\right],\quad -2\pi<\arg z<\pi.$$

对于复数 ν 及 $-\frac{1}{2}\pi<\arg z<3\pi/2$, 及对于 $-3\pi/2<\arg z<\frac{1}{2}\pi$, 第 M 項以后的余項的估値見華特生(1944, p. 219). 这些結果曾由梅杰推廣至范圍 $-\pi<\arg z<2\pi$, 及 $-2\pi<\arg z<\pi$ (Meijer, 1932, p. 656, 852, 948, 1079). 表示为無窮亨克尔函数級数的函数的漸近性态，可参看 Meixner (1949).

(3) $$J_\nu(z)=(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}\Big\{\cos(z-\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{1}{4}\pi)\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu,2m)(2z)^{-2m}+O(|z|^{-2M})\right]$$
$$-\sin(z-\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{1}{4}\pi)\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu,2m+1)(2z)^{-2m-1}+O(|z|^{-2M-1})\right]\Big\},$$
$$-\pi<\arg z<\pi.$$

(4) $$Y_\nu(z)=(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}\{\sin(z-\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{1}{4}\pi)$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu,2m)(2z)^{-2m}+O(|z|^{-2M})\right]$$

$$+\cos\left(z-\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{1}{4}\pi\right)$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu,2m+1)(2z)^{-2m-1}+O(|z|^{-2M-1})\right]\Big\},$$

$$-\pi<\arg z<\pi.$$

在第 M 項以后的余項的公式見 Watson (1944, p. 206, 209)，如 ν 为复数，見 Meijer (1932, 同上). 其他公式見 Burnett (1929).

(5) $$I_\nu(z)=(2\pi z)^{-\frac{1}{2}}\left\{e^z\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu,m)(2z)^{-m}+O(|z|^{-M})\right]\right.$$

$$\left.+ie^{-z+i\nu\pi}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu,m)(2z)^{-m}+O(|z|^{-M})\right]\right\},$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi<\arg z<3\pi/2.$$

(6) $$I_\nu(z)=(2z)^{-\frac{1}{2}}\pi^{-3/2}\cos(\pi\nu)\left\{\sum_{m=0}^{M-1}[e^z-i(-1)^m e^{-i\pi\nu-z}]\right.$$

$$\left.\times\Gamma(m+\tfrac{1}{2}-\nu)\Gamma(m+\tfrac{1}{2}+\nu)(2z)^{-m}/m!+e^zO(|z|^{-M})\right\},$$

$$-3\pi/2<\arg z<\tfrac{1}{2}\pi,$$

(7) $$K_\nu(z)=(\tfrac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}}e^{-z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu,m)(2z)^{-m}+O(|z|^{-M})\right],$$

$$-3\pi/2<\arg z<3\pi/2.$$

在所有这些公式中，

$$(\nu,m)=2^{-2m}\{(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)\cdots[4\nu^2-(2m-1)^2]\}/m!$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2}+\nu+m)/[m!\Gamma(\tfrac{1}{2}+\nu-m)].$$

7-13-2. 大的階

(8) $$2\pi I_p(x)=2^{\frac{1}{2}}(p^2+x^2)^{-\frac{1}{4}}\exp\left[(p^2+x^2)^{\frac{1}{2}}-p\,\mathrm{sh}^{-1}(p/x)\right]$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-2)^m a_m\Gamma(m+\tfrac{1}{2})(p^2+x^2)^{-\frac{1}{2}m}+O(x^{-M})\right],$$

$$p,\ x>0.$$

(9) $a_0=1,\ a_1=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{24}(1+x^2/p^2)^{-1},$

$$a_2=\frac{3}{128}-\frac{77}{576}(1+x^2/p^2)^{-1}+\frac{385}{3456}(1+x^2/p^2)^{-2},\ \cdots$$

〔$I_p(x)$ 的其他展开式見 Lehmer, 1944, Montroll, 1946〕.

(10) $K_p(x)=2^{-1/2}(p^2+x^2)^{-1/4}\exp[-(p^2+x^2)^{1/2}+p\,\mathrm{sh}^{-1}(p/x)]$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}2^m a_m\Gamma(m+1/2)(p^2+x^2)^{-1/2 m}+O(x^{-M})\right]$$

$p,\ x>0,\ a_m$ 与 (9)式中同.

(11) $\pi H_p^{(1)}(x)=2^{1/2}(x^2-p^2)^{-1/4}\exp[i(x^2-p^2)^{1/2}+ip\sin^{-1}(p/x)]$

$$\times e^{-i\frac{1}{2}\pi(p+\frac{1}{2})}\left[\sum_{m=0}^{M-1}2^m b_m\Gamma(m+1/2)(-i)^m(x^2-p^2)^{-1/2 m}\right.$$

$$\left.+O(x^{-M})\right],\qquad x>p>0,$$

(12) $b_0=1,\ b_1=\dfrac{1}{8}-\dfrac{5}{24}(1-x^2/p^2)^{-1},$

$$b_2=\frac{3}{128}-\frac{77}{576}(1-x^2/p^2)^{-1}+\frac{385}{3456}(1-x^2/p^2)^{-2},\ \cdots$$

(13) $\pi H_p^{(1)}(x)$

$$=-i2^{1/2}(p^2-x^2)^{-1/4}\exp[-(p^2-x^2)^{1/2}+p\,\mathrm{ch}^{-1}(p/x)]$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m 2^m b_m\Gamma(m+1/2)(p^2-x^2)^{-1/2 m}+O(x^{-M})\right],$$

$p>x>0,\ b_m$ 与 (12) 式中同.

(14) $2\pi J_p(x)=2^{1/2}(p^2-x^2)^{-1/4}\exp[(p^2-x^2)^{1/2}-p\,\mathrm{sh}^{-1}(p/x)]$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}2^m b_m\Gamma(m+1/2)(p^2-x^2)^{-1/2 m}+O(x^{-M})\right],$$

$p>x>0,\ b_m$ 与 (12) 式中同.

(15) $\pi H_p^{(1)}(x)\sim-2/3\sum_{m=0}^{\infty}e^{2(m+1)\pi i/3}B_m(\varepsilon x)\sin[(m+1)\pi/3]$

$$\times\Gamma(m+1/3)(x/6)^{-(m+1)/3},$$

$p\approx x,\ p,\ x>0,\ \varepsilon=1-p/x,\ \varepsilon=o(x^{-2/3}),$

(16) $B_0(\varepsilon x)=1,\ B_1(\varepsilon x)=\varepsilon x,\ B_2(\varepsilon x)=\tfrac{1}{2}(\varepsilon x)^2-\frac{1}{20},$

$$B_3(\varepsilon x)=\frac{1}{6}(\varepsilon x)^3-\frac{1}{15}\varepsilon x,\ B_4(\varepsilon x)=\frac{1}{24}(\varepsilon x)^4-\frac{1}{24}(\varepsilon x)^2+\frac{1}{280},$$

$$B_5(\varepsilon x)=\frac{1}{120}(\varepsilon x)^5-\frac{1}{60}(\varepsilon x)^3+\frac{43}{8400}\varepsilon x.$$

(B_6, B_7, B_9, 見 Airey, 1916, p. 520).

純虛数階

(17) $2\pi J_{ip}(x)$

$$=2^{\frac{1}{2}}(p^2+x^2)^{-\frac{1}{4}}\exp\left[i(p^2+x^2)^{\frac{1}{2}}-ip\,\mathrm{sh}^{-1}(p/x)-\tfrac{1}{4}i\pi\right]$$

$$\times e^{\frac{1}{2}p\pi}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(2i)^m a_m\Gamma(m+\tfrac{1}{2})(p^2+x^2)^{-\frac{1}{2}m}+O(x^{-M})\right],$$

$p,\ x>0$, a_m 与 (9) 式中的同.

(18) $K_{ip}(x)=2^{-\frac{1}{2}}(x^2-p^2)^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-(x^2-p^2)^{\frac{1}{2}}-p\sin^{-1}(p/x)\right]$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m 2^m b_m\Gamma(m+\tfrac{1}{2})(x^2-p^2)^{-\frac{1}{2}m}+O(x^{-m})\right],$$

$x>p>0$, b_m 与 (12) 式中同.

(19) $K_{ip}(x)=2^{\frac{1}{2}}(p^2-x^2)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}p\pi}$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{M-1}2^m b_m\Gamma(m+\tfrac{1}{2})(p^2-x^2)^{-\frac{1}{2}m}\right.$$

$$\times\sin\left[\tfrac{1}{2}\pi m+p\,\mathrm{ch}^{-1}(p/x)-(p^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{4}\pi\right]$$

$$\left.+O(x^{-M})\right\},$$

$p>x>0$, b_m 与 (12) 式中同.

(20) $K_{ip}(x)\sim\tfrac{1}{3}\pi e^{-\frac{1}{2}p\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_m(\varepsilon x)\sin[(m+1)\pi/3]$

$$\times\Gamma(\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{3})(x/6)^{-(m+1)/3},$$

$p\approx x,\ p,\ x>0,\ \varepsilon=1-p/x,\ \varepsilon=o(x^{-2/3}),$

(21) $C_0(\varepsilon x)=1,\ C_1(\varepsilon x)=\varepsilon x,\ C_2(\varepsilon x)=\tfrac{1}{2}(\varepsilon x)^2+\frac{1}{20},$

$$C_3(\varepsilon x)=\frac{1}{6}(\varepsilon x)^3+\frac{1}{15}\varepsilon x,\ C_4(\varepsilon x)=\frac{1}{24}(\varepsilon x)^4+\frac{1}{24}(\varepsilon x)^2+\frac{1}{280},$$

$$C_5(\varepsilon x)=\frac{1}{120}(\varepsilon x)^5+\frac{1}{60}(\varepsilon x)^3+\frac{43}{4800}\varepsilon x,$$

(22) $$\pi H_{ip}^{(1)}(x)=2^{1/2}(p^2+x^2)^{-1/4}\exp\left[i(p^2+x^2)^{1/2}-ip\,\mathrm{sh}^{-1}(p/x)\right]$$
$$\times e^{\frac{1}{2}p\pi-i\frac{1}{4}\pi}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-i)^m 2^m b_m\Gamma(m+\tfrac{1}{2})(p^2+x^2)^{-\frac{1}{2}m}\right.$$
$$\left.+O(x^{-M})\right],\qquad p,\ x>0,\ b_m \text{ 与 (12) 式中同.}$$

7-13-3. 过渡域

聶却尔生公式

($x\sim n$, n 整数 >0)

(23) $$J_n(x)\sim 3^{-2/3}(\xi/x)^{1/3}[J_{1/3}(\xi)+J_{-1/3}(\xi)],$$

(24) $$Y_n(x)\sim 3^{-1/6}(\xi/x)^{1/3}[J_{1/3}(\xi)-J_{-1/3}(\xi)],$$
$$x>n,\ \xi=\frac{2}{3}(\tfrac{1}{2}x)^{-1/2}(n-x)^{3/2}.$$

(25) $$J_n(x)\sim\pi^{-1}3^{-1/6}(\xi/x)^{1/3}K_{1/3}(\xi),$$

(26) $$Y_n(x)\sim -3^{-1/6}(\xi/x)^{1/3}[I_{1/3}(\xi)+I_{-1/3}(\xi)],$$
$$n>x,\ \xi=\frac{2}{3}(\tfrac{1}{2}x)^{-1/2}(x-n)^{3/2},$$

(27) $$e^{i\pi/6}H_n^{(2)}(x)\sim 3^{-1/6}(\xi/x)^{1/3}H_{1/3}^{(1)}(\xi),$$
$$\xi=\frac{2}{3}(\tfrac{1}{2}x)^{-1/2}(x-n)^{3/2},$$

如 $x>n$, $\arg(x-n)=0$; 如 $x<n$, $\arg(x-n)=\pi$.

華特生公式

(28) $$J_p(x)=3^{-1/2}w[J_{1/3}(pw^3/3)\cos\delta-Y_{1/3}(pw^3/3)\sin\delta]+O(p^{-1}),$$

(29) $$Y_p(x)=3^{-1/2}w[J_{1/3}(pw^3/3)\sin\delta+Y_{1/3}(pw^3/3)\cos\delta]+O(p^{-1}),$$

$$x>p,\ \delta=pw-pw^3/3-p\tan^{-1}w+\pi/6,\ w=(x^2/p^2-1)^{1/2},$$

(30) $$J_p(x)=3^{-1/2}\pi^{-1}we^{pa}K_{1/3}(pw^3/3)+O(p^{-1}),$$

(31) $$Y_p(x)=-3^{-1/2}we^{pa}[I_{1/3}(pw^3/3)+I_{-1/3}(pw^3/3)]+O(p^{-1}),$$

$$x<p,\ a=p(w+w^3/3-\tanh^{-1}w),\ w=(1-x^2/p^2)^{1/2}.$$

7-13-4. 均匀漸近公式

倫乔公式

(32) $$J_p(x)=w^{-1/2}(w-\tan^{-1}w)^{1/2}$$
$$\times[J_{1/3}(z)\cos(\pi/6)-Y_{1/3}(z)\sin(\pi/6)]+O(p^{-4/3}),$$

(33) $$Y_p(x)=w^{-1/2}(w-\tan^{-1}w)^{1/2}$$
$$\times[J_{1/3}(z)\sin(\pi/6)+Y_{1/3}(z)\cos(\pi/6)]+O(p^{-4/3}),$$

$$x>p,\ w=(x^2/p^2-1)^{1/2},\ z=p(w-\tan^{-1}w).$$

(34) $$J_p(x)=\pi^{-1}w^{-1/2}(\tanh^{-1}w-w)^{1/2}K_{1/3}(z)+O(p^{-4/3}),$$

(35) $$Y_p(x)=-w^{-1/2}(\tanh^{-1}w-w)^{1/2}\{I_{1/3}(z)+I_{-1/3}(z)\}$$
$$+O(p^{-4/3}).$$

$$x<p,\ w=(1-x^2/p^2)^{1/2},\ z=p(\tanh^{-1}w-w).$$

7-14. 積分公式

7-14-1. 有限積分

(1) $$\int z^{\nu+1}I_\nu(z)dz=z^{\nu+1}I_{\nu+1}(z),$$

(2) $$\int z^{-\nu+1}I_\nu(z)dz=z^{-\nu+1}I_{\nu-1}(z),$$

(3) $$\int z^{\nu+1}K_\nu(z)dz=-z^{\nu+1}K_{\nu+1}(z),$$

(4) $$\int z^{-\nu+1}K_\nu(z)dz=-z^{-\nu+1}K_{\nu-1}(z),$$

(5) $$\int z^\nu J_\nu(z)dz$$
$$=2^{\nu-1}\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)z[J_\nu(z)\mathbf{H}_{\nu-1}(z)-\mathbf{H}_\nu(z)J_{\nu-1}(z)],$$

(6) $\int z^{\nu}K_{\nu}(z)dz$

$$=2^{\nu-1}\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)z[K_{\nu}(z)\mathbf{L}_{\nu-1}(z)+\mathbf{L}_{\nu}(z)K_{\nu-1}(z)],$$

(7) $\int z^{\mu}J_{\nu}(z)dz$

$$=(\mu+\nu-1)zJ_{\nu}(z)S_{\mu-1,\,\nu-1}(z)-zJ_{\nu-1}(z)S_{\mu,\,\nu}(z),$$

如果第一类貝塞尔函数用第二类或第三类貝塞尔函数代替,則(5)式及(7)式仍正确.

設 $w_{\nu}(z)$ 及 $W_{\mu}(z)$ 为任何第一,第二或第三类貝塞尔函数,它們的階分别为 ν 及 μ,則

(8) $\int[(\beta^2-\alpha^2)z+(\nu^2-\mu^2)/z]w_{\nu}(\alpha z)W_{\mu}(\beta z)dz$

$$=z[\alpha W_{\mu}(\beta z)w'_{\nu}(\alpha z)-\beta w_{\nu}(\alpha z)W'_{\mu}(\beta z)]$$

$$=\alpha zW_{\mu}(\beta z)w_{\nu-1}(\alpha z)-\beta zW_{\mu-1}(\beta z)w_{\nu}(\alpha z)$$

$$+(\mu-\nu)W_{\mu}(\beta z)w_{\nu}(\alpha z),$$

(9) $\int zw_{\nu}(\alpha z)W_{\nu}(\beta z)dz=z(\beta^2-\alpha^2)^{-1}$

$$\times[\beta W_{\nu+1}(\beta z)w_{\nu}(\alpha z)-\alpha W_{\nu}(\beta z)w_{\nu+1}(\alpha z)],$$

(10) $\int zw_{\nu}(\alpha z)W_{\nu}(\alpha z)dz$

$$=1/4z^2[2w_{\nu}(\alpha z)W_{\nu}(\alpha z)-w_{\nu+1}(\alpha z)W_{\nu-1}(\alpha z)$$

$$-w_{\nu-1}(\alpha z)W_{\nu+1}(\alpha z)],$$

(11) $\int z^{-1}w_{\nu}(\alpha z)W_{\nu}(\alpha z)dz=(2\nu)^{-1}w_{\nu}(\alpha z)W_{\nu}(\alpha z)$

$$+(2\nu)^{-1}\alpha z\left[w_{\nu+1}(\alpha z)\frac{\partial W_{\nu}(\alpha z)}{\partial\nu}-w_{\nu}(\alpha z)\frac{\partial W_{\nu+1}(\alpha z)}{\partial\nu}\right].$$

設 $v_{\nu}(z)$ 及 $V_{\mu}(z)$ 为任何第一类或第二类修正貝塞尔函数,它們的階分别为 ν 及 μ,則

(12) $\int[(\beta^2-\alpha^2)z+(\mu^2-\nu^2)/z]v_{\nu}(\alpha z)V_{\mu}(\beta z)\,dz$

$$=z[-\alpha V_{\mu}(\beta z)v'_{\nu}(\alpha z)+\beta v_{\nu}(\alpha z)V'_{\mu}(\beta z)],$$

(13) $\int z[v_\nu(\alpha z)]^2 dz$

$$= -\tfrac{1}{2}z^2\{[v_\nu'(\alpha z)]^2 - [v_\nu(\alpha z)]^2(1+\alpha^{-2}z^{-2}\nu^2)\},$$

其他的不定積分公式，見 Watson (1944, p. 163–183)、Thielmann (1929)、McLachlan (1934, p. 115)、McLachlan 及 Meyers (1936, p. 437)、Straubel (1941, 1942)、Picht (1949)、Horton (1950)、Luke (1950).

(14) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\mu[z(\sin\theta)^2]J_\nu[z(\cos\theta)^2](\sin\theta\cos\theta)^{-1}d\theta$

$$= \tfrac{1}{2}(\nu^{-1}+\mu^{-1})J_{\nu+\mu}(z)/z, \qquad \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Re}\mu>0,$$

(15) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\mu[z(\sin\theta)^2]J_\nu[z(\cos\theta)^2]\operatorname{ctn}\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}J_{\nu+\mu}(z)/\mu,$

$$\operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu>0,$$

(16) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\mu[z(\sin\theta)^2]J_\nu[z(\cos\theta)^2]\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$$= z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m J_{\nu+\mu+2m+1}(z), \qquad \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu>-1.$$

(17) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\mu[z(\sin\theta)^2]J_\nu[z(\cos\theta)^2](\sin\theta)^{2\lambda-1}(\cos\theta)^{2\delta-1}d\theta,$

(Bailey, 1930, p. 419, 1930 c, p. 203; Rutgers, 1931.)

(18) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\lambda(z\sin\theta)J_\nu(z\sin\theta)(\sin\theta)^{2\delta+1}(\cos\theta)^{2\mu+1}d\theta,$

(19) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\lambda(z\sin\theta)J_\nu(z\cos\theta)(\sin\theta)^{2\delta+1}(\cos\theta)^{2\mu+1}d\theta,$

(Bailey, 1938, p. 145.)

(20) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} [J_\nu(z\sin\theta)]^2(\sin\theta)^{2\delta+1}(\cos\theta)^{2\mu+1}d\theta.$

(Bailey, 1938, p. 141.)

(21) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} [J_\nu(z\sin\theta)]^2\sin\theta\, d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} z^{-1}J_{2\nu+2m+1}(2z),$

$$\operatorname{Re}\nu>-1.$$

(22) $\int_0^z t^\lambda \sin(z-t)J_\nu(t)\, dt,$

(23) $\int_0^z t^\lambda \cos(z-t) J_\nu(t)\, dt,$

(Bailey, 1930 c, p. 204, 205.)

(24) $$\sin\pi(\nu+\mu)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} K_{\mu+\nu}(2z\cos\theta)\cos[(\mu-\nu)\theta]\,d\theta$$
$$=\tfrac{1}{2}\pi[I_{-\nu}(z)I_{-\mu}(z)-I_\nu(z)I_\mu(z)], \qquad |\mathrm{Re}\,(\mu+\nu)|<1.$$

7-14-2. 無窮積分

具有指数函数的積分

(25) $$\int_0^\infty Y_{2\nu}(at)e^{-\gamma^2t^2}\,dt$$
$$=-\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\gamma^{-1}\exp\left(-\frac{1}{8}a^2/\gamma^2\right)$$
$$\times\left[I_\nu\left(\frac{1}{8}a^2/\gamma^2\right)\tan\nu\pi+\frac{1}{\pi}K_\nu\left(\frac{1}{8}a^2/\gamma^2\right)\sec\nu\pi\right],$$
$$|\mathrm{Re}\,\nu|<\tfrac{1}{2},$$

(26) $$\int_0^\infty e^{-t}t^{-1}H_\nu^{(1)}(2x^2/t)\,dt=2K_\nu(2x)H_\nu^{(1)}(2x),$$

(Hardy, 1927).

(27) $$\int_0^\infty I_\nu(at)e^{-\gamma^2t^2}\,dt=\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\gamma^{-1}\exp\left(\frac{1}{8}a^2/\gamma^2\right)I_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{8}a^2/\gamma^2\right),$$
$$\mathrm{Re}\,\nu>-1,\ \mathrm{Re}\,\gamma^2>0.$$

[并見 7-14(60) 至 7-14(79)].

韋勃-謝希特林積分的特殊情形

(28) $$\int_0^\infty t^{-1}J_\mu(at)\sin(bt)\,dt=\mu^{-1}\sin[\mu\sin^{-1}(b/a)], \qquad b<a,$$
$$=a^\mu\mu^{-1}\sin(\tfrac{1}{2}\pi\mu)[b+(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\mu}, \qquad b>a,$$
$$\mathrm{Re}\,\mu>-1.$$

(29) $$\int_0^\infty t^{-1}J_\mu(at)\cos(bt)dt=\mu^{-1}\cos[\mu\sin^{-1}(b/a)], \qquad b<a,$$
$$=\mu^{-1}a^\mu\cos(\tfrac{1}{2}\mu\pi)[b+(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\mu}, \qquad b>a,$$
$$\mathrm{Re}\,\mu>0.$$

(30) $$\int_0^\infty J_\mu(at)\cos(bt)\,dt=(a^2-b^2)^{-1/2}\cos[\mu\sin^{-1}(b/a)],\qquad b<a,$$

$$=-a^\mu\sin(\tfrac{1}{2}\mu\pi)(b^2-a^2)^{-1/2}[b+(b^2-a^2)^{1/2}]^{-\mu},\qquad b>a,$$

$$\mathrm{Re}\,\mu>-1.$$

(31) $$\int_0^\infty J_\mu(at)\sin(bt)\,dt=(a^2-b^2)^{-1/2}\sin[\mu\sin^{-1}(b/a)],\qquad b<a,$$

$$=a^\mu\cos(\tfrac{1}{2}\mu\pi)(b^2-a^2)^{-1/2}[b+(b^2-a^2)^{1/2}]^{-\mu},\qquad b>a,$$

$$\mathrm{Re}\,\mu>-2.$$

紐孟函数的对应積分公式,見 Nielsen (1904, p. 195).

(32) $$\tfrac{1}{2}\pi(\nu^2-\mu^2)\int_0^\infty J_\mu(at)J_\nu(at)t^{-1}\,dt=\sin\tfrac{1}{2}(\nu-\mu)\pi,\qquad \mathrm{Re}\,(\nu+\mu)>0.$$

(33) $$\int_0^\infty J_\mu(at)J_\nu(at)t^{-(\nu+\mu)}\,dt$$

$$=\frac{\pi^{1/2}(\tfrac{1}{2}a)^{\nu+\mu}\Gamma(\mu+\nu)}{a\Gamma(\tfrac{1}{2}+\nu+\mu)\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})},\qquad \mathrm{Re}\,(\nu+\mu)>0.$$

(34) $$\Gamma(\nu-\mu)\int_0^\infty J_\mu(at)J_\nu(bt)t^{\mu-\nu+1}\,dt$$

$$=2^{\mu-\nu+1}a^\mu b^{-\nu}(b^2-a^2)^{\nu-\mu-1}\qquad b>a,$$

$$=0.\qquad b<a,$$

$$\mathrm{Re}\,\nu>\mathrm{Re}\,\mu>-1.$$

与韋勃-謝希特林積分有关的積分式

(35) $$2^{\rho+1}\Gamma(\nu+1)a^{\nu+1-\rho}\int_0^\infty K_\mu(at)I_\nu(bt)t^{-\rho}\,dt$$

$$=b^\nu\Gamma(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu)\Gamma(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rho-\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu)$$

$$\times{}_2F_1(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rho-\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu;$$

$$\nu+1;\ b^2/a^2),\qquad \mathrm{Re}\,(\nu-\rho+1\pm\mu)>0,\ a>b.$$

(36) $$2^{\rho+2}\Gamma(1-\rho)\int_0^\infty K_\mu(\alpha t)K_\nu(\beta t)t^{-\rho}\,dt$$

$$=\alpha^{\rho-\nu-1}\beta^\nu{}_2F_1(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\rho,\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\rho;$$

$$1-\rho;\ 1-\beta^2/\alpha^2)$$
$$\times\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\rho)\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\rho)$$
$$\times\Gamma(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\rho)\Gamma(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\rho),$$
$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0,\ \operatorname{Re}(\rho\pm\mu\pm\nu+1)>0,$$

(37) $$\tfrac{1}{2}\pi\int_0^\infty Y_\mu(at)J_\nu(bt)t^{-\rho}\,dt=\sin\tfrac{1}{2}\pi(\nu-\mu-\rho)$$
$$\times\int_0^\infty K_\mu(at)I_\nu(bt)t^{-\rho}\,dt,\quad a>b,\ \operatorname{Re}(\nu-\rho+1\pm\mu)>0,$$

(38) $$\int_0^\infty Y_\nu(bt)J_\mu(at)t^{-\rho}\,dt$$
$$=-\int_0^\infty\{Y_\mu(at)J_\nu(bt)+(4/\pi^2)\cos[\tfrac{1}{2}\pi(\rho+\nu+\mu)]$$
$$\times K_\mu(at)K_\nu(bt)\}t^{-\rho}\,dt;$$
$$a>b,\ \operatorname{Re}(\rho+\nu-\mu)>-1,\ \operatorname{Re}\rho>-1,$$

(39) $$\int_0^\infty J_\nu(\beta t)K_\mu(\alpha t)t^{\nu+\mu+1}\,dt$$
$$=(2\beta)^\nu(2\alpha)^\mu\Gamma(\nu+\mu+1)(\alpha^2+\beta^2)^{-\nu-\mu-1},$$
$$\operatorname{Re}(\nu+1)>|\operatorname{Re}\mu|,\ \operatorname{Re}\alpha>|\operatorname{Im}\beta|$$

其他組合見 Dixon 及 Ferrar (1930).

包含三个或多个貝塞尔函数的相乘積的積分

(40) $$\int_0^\infty t^{\rho-1}J_\mu(at)J_\nu(bt)J_\lambda(ct)\,dt,$$

(Watson, 1934).

(41) $$\int_0^\infty t^{\rho-1}J_\mu(at)J_\nu(bt)\begin{Bmatrix}J_\lambda(ct)\\K_\lambda(ct)\end{Bmatrix}dt,$$

(42) $$\int_0^\infty t^{\rho-1}I_\mu(at)K_\lambda(ct)\begin{Bmatrix}I_\nu(bt)\\K_\nu(bt)\end{Bmatrix}dt,$$

(43) $$\int_0^\infty t^{\rho-1}K_\mu(at)K_\nu(bt)K_\rho(ct)\,dt,$$

(Bailey, 1935 a, 1936).

(44) $$\int_0^\infty [J_\nu(ax)]^2[J_\nu(bx)]^2x^{1-2\nu}\,dx$$

$$=\frac{a^{2\nu-1}\Gamma(\nu)}{2\pi b\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(2\nu+\frac{1}{2})}\,{}_2F_1(\nu,\tfrac{1}{2}-\nu;\,2\nu+\tfrac{1}{2};\,a^2/b^2),$$

$0<\operatorname{Re}\nu,$

(45) $$\int_0^\infty J_\nu(ax)Y_\nu(ax)J_\nu(bx)Y_\nu(bx)x^{2\nu+1}\,dx$$

$$=\frac{a^{2\nu}b^{-2-4\nu}\Gamma(3\nu+1)}{2\pi\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)\Gamma(2\nu+\frac{3}{2})}\,{}_2F_1(\nu+\tfrac{1}{2},\,3\nu+1;\,2\nu+\tfrac{3}{2};\,a^2/b^2)$$

$-\frac{1}{3}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}.$

(其他公式見 Nicholson, 1920, 1927; Titchmarsh, 1927; Mitra, 1933; Mayr, 1933; Sinha, 1943).

沙涅-盖根堡型積分

(46) $$\int_0^\infty J_\mu(bt)K_\nu[a(t^2+z^2)^{\frac{1}{2}}](t^2+z^2)^{-\frac{1}{2}\nu}t^{\mu+1}\,dt$$

$$=b^\mu a^{-\nu}z^{\mu-\nu+1}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}K_{\nu-\mu-1}[z(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}],$$

$\operatorname{Re}\mu>-1,\ \operatorname{Re}z>0.$

(47) $$\int_0^\infty J_\mu(bt)K_\nu[a(t^2-y^2)^{\frac{1}{2}}](t^2-y^2)^{-\frac{1}{2}\nu}t^{\mu+1}\,dt$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi e^{-i\pi(\nu-\mu-\frac{1}{2})}b^\mu a^{-\nu}y^{1+\mu-\nu}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}$$

$$\times H^{(2)}_{\nu-\mu-1}[y(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}],\qquad \operatorname{Re}\nu<1,\ \operatorname{Re}\mu>-1.$$

如 $t>y$, 則 $\arg(t^2-y^2)^{\frac{1}{2}}=0$; 如 $t<y$, 則 $\arg(t^2-y^2)^\sigma=\pi\sigma$, 此处, $\sigma=\frac{1}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}\nu$.

(48) $$\int_0^\infty J_\mu(bt)H^{(2)}_\nu[a(t^2+x^2)^{\frac{1}{2}}](t^2+x^2)^{-\frac{1}{2}\nu}t^{\mu+1}\,dt$$

$$=a^{-\nu}b^\mu x^{1+\mu-\nu}(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}H^{(2)}_{\nu-\mu-1}[x(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}],$$

$a>b,$

$$=2i\pi^{-1}b^\mu a^{-\nu}x^{1+\mu-\nu}(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}K_{\nu-\mu-1}[x(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}],$$

$a<b,$

$\operatorname{Re}\nu>\operatorname{Re}\mu>-1,\ x>0.$

(49) $\int_0^\infty H_\nu^{(2)}[a(t^2+x^2)^{1/2}](t^2+x^2)^{-1/2\nu}t^{2\mu+1}\,dt$

$=2^\mu a^{-\mu-1}x^{1+\mu-\nu}\Gamma(\mu+1)H_{\nu-\mu-1}^{(2)}(ax),$

$\operatorname{Re}(1/2\nu-1/4)>\operatorname{Re}\mu>-1.$

(50) $\int_0^\infty K_\nu[a(t^2+z^2)^{1/2}](t^2+z^2)^{-1/2\nu}t^{2\mu+1}\,dt$

$=2^\mu a^{-\mu-1}z^{1+\mu-\nu}\Gamma(\mu+1)K_{\nu-\mu-1}(az),\quad a>0,\ \operatorname{Re}\mu>-1.$

(51) $\int_0^\infty J_\mu(bt)(t^2+z^2)^{-\nu}t^{\mu+1}\,dt$

$=(1/2 b)^{\nu-1}z^{1+\mu-\nu}K_{\nu-\mu-1}(bz)/\Gamma(\nu),$

$\operatorname{Re}(2\nu-1/2)>\operatorname{Re}\mu>-1,\ \operatorname{Re}z>0.$

(52) $\int_0^\infty J_0(bt)e^{-a(t^2-y^2)^{1/2}}(t^2-y^2)^{-1/2}t\,dt=e^{-iy(a^2+b^2)^{1/2}}(a^2+b^2)^{-1/2},$

如 $t<y,\ \arg(t^2-y^2)^{1/2}=1/2\pi.$

(53) $\pi e^{-iy(a^2+y^2)^{1/2}}(a^2+b^2)^{-1/2}=2\int_0^\infty\cos(bt)K_0[a(t^2-y^2)^{1/2}]\,dt$

$=-\pi i\int_0^\infty\cos(bt)H_0^{(2)}[a(y^2-t^2)^{1/2}]\,dt,$

(类似的公式見 Watson, 1944, p. 417–418; Mayr, 1932; Gupta 1943 b.)

(54) $e^{i1/2\pi(\rho-\nu)}\int_0^\infty t^{\rho-1}J_\mu[b(t^2+y^2)^{1/2}](t^2+y^2)^{-1/2\mu}(t^2-\alpha^2)^{-m-1}$

$\times\{\cos[1/2\pi(\rho-\nu)]J_\nu(at)+\sin[1/2\pi(\rho-\nu)]Y_\nu(at)\}dt$

$=\frac{\pi i}{m!}2^{-m-1}\left(\frac{d}{\alpha d\alpha}\right)^m$

$\times\{\alpha^{\rho-2}J_\mu[b(\alpha^2+y^2)^{1/2}](\alpha^2+y^2)^{-1/2\mu}H_\nu^{(1)}(\alpha a)\},$

$a\geqslant b,\ \operatorname{Re}(\pm\nu)<\operatorname{Re}\rho<2m+4+\operatorname{Re}\mu,\ \operatorname{Re}(i\alpha)<0,\ m=0,$ $1,2,\cdots$

(55) $\int_0^\infty t^{\rho-1}J_\mu[b(t^2+y^2)^{1/2}](t^2+y^2)^{-1/2\mu}(t^2+\beta^2)^{-m-1}$

$\times\{\cos[1/2\pi(\rho-\nu)]J_\nu(at)+\sin[1/2\pi(\rho-\nu)]Y_\nu(at)\}dt$

$$= (-1)^{m+1} \frac{2^{-m}}{m!} \left(\frac{d}{\beta d\beta}\right)^m$$

$$\times \{\beta^{\rho-2} J_\mu[b(y^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}](y^2-\beta^2)^{-\frac{1}{2}\mu} K_\nu(a\beta)\},$$

$a \geqslant b$, $\mathrm{Re}\,(\pm\nu) < \mathrm{Re}\,\rho < 2m+4+\mathrm{Re}\,\mu$, $\mathrm{Re}\beta > 0$, $m=0,$ $1, 2, \cdots$

(56) $$\int_0^\infty t^{\nu+1} J_\mu[b(t^2+y^2)^{\frac{1}{2}}](t^2+y^2)^{-\frac{1}{2}\mu}(t^2+\beta^2)^{-1} J_\nu(at)\, dt$$

$$= \beta^\nu J_\mu[b(y^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}](y^2-\beta^2)^{-\frac{1}{2}\mu} K_\nu(a\beta),$$

$a \geqslant b$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, $-1 < \mathrm{Re}\,\nu < 2+\mathrm{Re}\,\mu$.

(57) $$\int_0^\infty t^{\nu-\mu+1} J_\mu(bt) J_\nu(at)(t^2+\beta^2)^{-1}\, dt = \beta^{\nu-\mu} I_\mu(b\beta) K_\nu(a\beta),$$

$a \geqslant b$, $\mathrm{Re}\,\nu > -1$, $\mathrm{Re}\,(\nu-\mu) < 2$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$.

(58) $$\int_0^\infty t^{\nu+1} J_\nu(at)(t^2+\beta^2)^{-1}\, dt = \beta^\nu K_\nu(a\beta),$$

$a > 0$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, $-1 < \mathrm{Re}\,\nu < \frac{3}{2}$.

(59) $$\int_0^\infty t^{\nu+1} J_\nu(at)(t^2+\beta^2)^{-\mu-1} dt = a^\mu \beta^{\nu-\mu} 2^{-\mu} K_{\nu-\mu}(a\beta)/\Gamma(\mu+1),$$

$-1 < \mathrm{Re}\,\nu < 2\,\mathrm{Re}\,\mu + \frac{3}{2}$.

类似的積分公式見 Watson (1944, p. 434—435).

貝塞尔函数的積

(60) $$K_\mu(Z) K_\nu(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{-(\mu-\nu)t} \left(\frac{Ze^t+ze^{-t}}{Ze^{-t}+ze^t}\right)^{\frac{1}{2}(\nu+\mu)}$$

$$\times K_{\nu+\mu}[(Z^2+z^2+2Zz\,\mathrm{ch}\,2t)^{\frac{1}{2}}]\, dt,$$

$\mathrm{Re}\,(Z) > 0$, $\mathrm{Re}\,z > 0$.

(61) $$2\pi J_\mu(X) J_\nu(x) = \int_{-\pi}^\pi e^{i\nu\theta} \left(\frac{X-xe^{-i\theta}}{X-xe^{i\theta}}\right)^{\frac{1}{2}(\nu+\mu)}$$

$$\times [\cos\nu\pi J_{\mu+\nu}(w) - \sin\nu\pi Y_{\mu+\nu}(w)]\, d\theta$$

$$-2\sin\nu\pi \int_0^\infty e^{-\nu t} \left(\frac{X+xe^t}{X+xe^{-t}}\right)^{\frac{1}{2}(\nu+\mu)}$$

$$\times [\cos\nu\pi J_{\mu+\nu}(\Phi) - \sin\nu\pi Y_{\mu+\nu}(\Phi)]\, dt$$

$X > x > 0$, $\mathrm{Re}\,(\mu-\nu) < \frac{1}{2}$, $w = (X^2+x^2-2xX\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$,

$\Phi = (X^2+x^2+2Xx\,\mathrm{ch}\,t)^{\frac{1}{2}}$,

(Dixon 及 Ferrar, 1933, p. 193, 194).

(62) $J_\mu(z)J_\nu(z)+Y_\mu(z)Y_\nu(z)$

$$=4\pi^{-2}\int_0^\infty K_{\mu+\nu}(2z\,\mathrm{sh}\,t)[e^{(\mu-\nu)t}\cos\nu\pi+e^{-(\mu-\nu)t}\cos\mu\pi]dt,$$

$\mathrm{Re}\,z>0,\ |\mathrm{Re}\,(\nu+\mu)|<1.$

(63) $J_\mu(z)J_\nu(z)+Y_\mu(z)Y_\nu(z)$

$$=4\pi^{-2}\int_0^\infty K_{\nu-\mu}(2z\,\mathrm{sh}\,t)[e^{(\mu+\nu)t}+e^{-(\mu+\nu)t}\cos(\mu-\nu)]dt,$$

$\mathrm{Re}\,z>0,\ |\mathrm{Re}\,(\nu-\mu)|<1.$

(64) $J_\mu(x)J_\nu(x)-Y_\mu(x)Y_\nu(x)$

$$=4\pi^{-1}\int_0^\infty Y_{\mu+\nu}(2x\,\mathrm{ch}\,t)\,\mathrm{ch}\,[(\mu-\nu)t]\,dt,\qquad x>0.$$

(65) $J_\mu(x)Y_\nu(x)+J_\nu(x)Y_\mu(x)$

$$=-4\pi^{-1}\int_0^\infty J_{\mu+\nu}(2x\,\mathrm{ch}\,t)\,\mathrm{ch}\,[(\mu-\nu)t]\,dt,\qquad x>0.$$

(66) $J_\mu(z)Y_\nu(z)-J_\nu(z)Y_\mu(z)$

$$=4\pi^{-2}\int_0^\infty K_{\nu+\mu}(2z\,\mathrm{sh}\,t)[e^{(\nu-\mu)t}\sin(\mu\pi)-e^{(\mu-\nu)t}\sin(\nu\pi)]\,dt,$$

$\mathrm{Re}\,z>0,\ |\mathrm{Re}\,(\nu+\mu)|<1.$

(67) $J_\mu(z)Y_\nu(z)-J_\nu(z)Y_\mu(z)$

$$=4\pi^{-2}\sin[(\mu-\nu)\pi]\int_0^\infty K_{\nu-\mu}(2z\,\mathrm{sh}\,t)e^{-(\nu+\mu)t}\,dt,$$

$\mathrm{Re}\,z>0,\ |\mathrm{Re}\,(\nu-\mu)|<1.$

(68) $$K_\nu(x)I_\mu(x)=\int_0^\infty J_{\nu+\mu}(2x\,\mathrm{sh}\,t)e^{(\nu-\mu)t}\,dt,$$

$\mathrm{Re}\,(\nu-\mu)<3/2,\ \mathrm{Re}\,(\nu+\mu)>-1,\ x>0,$

(69) $$[K_\nu(x)]^2\sin(\nu\pi)=\pi\int_0^\infty J_0(2x\,\mathrm{sh}\,t)\,\mathrm{sh}\,(2\nu t)\,dt,$$

$|\mathrm{Re}\,\nu|<3/4,\ x>0.$

(70) $$[K_\nu(x)]^2\cos(\nu\pi)=-\pi\int_0^\infty Y_0(2x\,\mathrm{sh}\,t)\,\mathrm{ch}\,(2\nu t)\,dt,$$

$|\mathrm{Re}\,\nu|<3/4,\ x>0.$

(71) $I_\nu(x)K_\mu(x)+I_\mu(x)K_\nu(x)$

$$=2\int_0^\infty J_{\nu+\mu}(2x\,\mathrm{sh}\,t)\,\mathrm{ch}\,[(\mu-\nu)t]\,dt,$$

$\mathrm{Re}\,(\nu+\mu)>-1,\ |\mathrm{Re}\,(\mu-\nu)|<3/2,\ x>0.$

(72) $I_\nu(x)K_\mu(x)-I_\mu(x)K_\nu(x)$

$$=2\int_0^\infty J_{\nu+\mu}(2x\,\mathrm{sh}\,t)\,\mathrm{sh}\,[(\mu-\nu)t]\,dt,$$

$\mathrm{Re}\,(\nu+\mu)>-1,\ |\mathrm{Re}\,(\mu-\nu)|<3/2,\ x>0.$

(73) $I_\mu(x)K_\nu(x)-\cos[(\nu-\mu)\pi]I_\nu(x)K_\mu(x)$

$$=\sin[\pi(\mu-\nu)]\int_0^\infty Y_{\nu-\mu}(2x\,\mathrm{sh}\,t)e^{-(\nu+\mu)t}\,dt,$$

$x>0,\ |\mathrm{Re}\,(\nu-\mu)|<1,\ \mathrm{Re}\,(\nu+\mu)>-1/2.$

(74) $J_\nu(z)\dfrac{\partial Y_\nu(z)}{\partial\nu}-Y_\nu(z)\dfrac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}$

$$=-4\pi^{-1}\int_0^\infty K_0(2z\,\mathrm{sh}\,t)e^{-2\nu t}\,dt,\qquad \mathrm{Re}\,z>0.$$

(75) $I_\nu(x)\dfrac{\partial K_\nu(x)}{\partial\nu}-K_\nu(x)\dfrac{\partial I_\nu(x)}{\partial\nu}$

$$=\pi\int_0^\infty Y_0(2x\,\mathrm{sh}\,t)\,\mathrm{sh}\,(2\nu t)\,dt,$$

$$+\cos(\nu\pi)[K_\nu(x)]^2\qquad x>0,\ |\mathrm{Re}\,\nu|<3/4.$$

这些公式的大部分，見 Dixon 及 Ferrar (1930) 及 Meijer (1936, p. 519).

(76) $H_\nu^{(2)}(x)H_\mu^{(2)}(y)=(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1}i\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-(\nu-\mu)t}\left(\frac{xe^{-t}+ye^t}{xe^t+ye^{-t}}\right)^{\frac{1}{2}(\nu+\mu)}$

$$\times H_{\nu+\mu}^{(2)}[(x^2+y^2+2xy\,\mathrm{ch}\,2t)^{1/2}]\,dt,$$

$|\mathrm{Re}\,(\nu-\mu)|<3/2.$

(77) $2\pi K_\mu(x)I_\nu(y)=\displaystyle\int_{-\pi}^\pi e^{-i\nu\phi}\left(\frac{x-ye^{i\phi}}{x-ye^{-i\phi}}\right)^{\frac{1}{2}(\nu+\mu)}$

$$\times K_{\nu+\mu}[(x^2+y^2-2xy\cos\phi)^{1/2}]\,d\phi-2\sin(\nu\pi)$$

$$\times\int_0^\infty e^{\nu t}\left(\frac{x+ye^{-t}}{x+ye^t}\right)^{\frac{1}{2}(\nu+\mu)}K_{\nu+\mu}[(x^2+y^2+2xy\,\mathrm{ch}\,t)^{1/2}]\,dt,$$

$x>y.$

Dixon 及 Ferrar (1933).

(78) $$I_\nu(z)K_\nu(\xi)=\int_0^\infty J_{2\nu}[2(z\xi)^{1/2}\operatorname{sh} t]e^{-(\xi-z)\operatorname{ch} t}\,dt,$$
$$\operatorname{Re}\nu>-1/2,\ \operatorname{Re}(\xi-z)>0.$$

(79) $$K_\nu(z)K_\nu(\xi)=2\cos(\nu\pi)\int_0^\infty K_{2\nu}[2(z\xi)^{1/2}\operatorname{sh} t]e^{-(\xi+z)\operatorname{ch} t}\,dt,$$
$$-1/2<\operatorname{Re}\nu<1/2,\ \operatorname{Re}(z^{1/2}+\xi^{1/2})^2\geqslant 0.$$

[幷見 7-14(25) 至 7-14(27)].

包含斯特拉夫函数的積分

(80) $$\int_0^\infty t^{\mu-\nu-1}\boldsymbol{H}_\nu(t)\,dt=\frac{\Gamma(1/2\mu)2^{\mu-\nu-1}\tan(1/2\mu\pi)}{\Gamma(\nu-1/2\mu+1)},$$
$$-1<\operatorname{Re}\mu<1,\ \operatorname{Re}\nu>\operatorname{Re}\mu-3/2.$$

(81) $$\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\nu(t)\boldsymbol{H}_\mu(t)t^{-\mu-\nu}\,dt=\frac{\pi^{1/2}\Gamma(\mu+\nu)2^{-\mu-\nu}}{\Gamma(\mu+\nu+1/2)\Gamma(\mu+1/2)\Gamma(\nu+1/2)},$$
$$\operatorname{Re}(\mu+\nu)>0.$$

(82) $$\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\nu(2zt)(t^2-1)^{-\nu-1/2}t^{-\nu}\,dt=1/2\pi^{1/2}\Gamma(1/2-\nu)z^\nu[J_\nu(z)]^2,$$
$$z>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1/2.$$

包含斯特拉夫函数的其他積分,見 Mohan (1942)、Horton (1950).

7-15. 貝塞尔函数的級数

紐孟型級数

(1) $$z^\nu e^{\gamma z}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^\infty(\nu+n)C_n^\nu(\gamma)I_{\nu+n}(z).$$

(2) $$(1/2z)^{\mu-\nu}J_\nu(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\mu+n)\Gamma(\nu+1-\mu)(\mu+2n)}{n!\Gamma(\nu+1-\mu-n)\Gamma(\nu+n+1)}J_{\mu+2n}(z).$$

(如 $\nu-\mu$ 为非負整数,上式变为一有尽的和).

(3) $$J_\nu(z\sin\theta)=(1/2\pi z)^{-1/2}(\sin\theta)^\nu\sum_{n=0}^\infty\frac{(\nu+1/2+2n)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+\nu+1)}\Gamma(\nu+1/2)\times C_{2n}^{\nu+1/2}(\cos\theta)J_{\nu+1/2+2n}(z),$$

(4) $$\boldsymbol{H}_\nu(z)\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}) = 4\pi^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu+1+2n)\Gamma(\nu+1+n)}{n!\,(2n+2\nu+1)(2n+1)}J_{\nu+1+2n}(z),$$

(5) $$J_\nu(z)\pi=\sin\nu\pi\left[\nu^{-1}J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+n}+\frac{(-1)^n}{\nu-n}\right)J_n(x)\right],$$

(6) $$(\tfrac{1}{2}z)^{\gamma-\nu-\mu}J_\mu(\alpha z)J_\nu(\beta z) = [\alpha^\mu\beta^\nu/\Gamma(\nu+1)]\sum_{m=0}^{\infty}(\gamma+2m)J_{\gamma+2m}(z)$$
$$\times\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\gamma+m+n)\alpha^{2n}}{n!\,(m-n)!\,[\Gamma(n+\mu+1)]^2}\times{}_2F_1(-n,\ -n-\mu;\ \nu+1;\ \beta^2/\alpha^2)\right],$$

(7) $$(\tfrac{1}{2}z)^{\gamma-\mu-\nu}J_\mu(\alpha z)J_\nu(\beta z)=\alpha^\mu\beta^\nu/[\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)]$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\gamma+2m)\Gamma(\gamma+m)}{m!}\times F_4(-m,\gamma+m;\mu+1,\nu+1;\alpha^2,\beta^2)J_{\gamma+2m}(z),$$

(Bailey, 1935).

(8) $$\tfrac{1}{2}zJ_\mu(z\cos\phi\cos\Phi)J_\nu(z\sin\phi\sin\Phi) =(\cos\phi\cos\Phi)^\mu(\sin\phi\sin\Phi)^\nu$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\mu+\nu+2n+1)J_{\mu+\nu+2n+1}(z)$$
$$\times\frac{\Gamma(\mu+\nu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)}{n!\,\Gamma(\mu+n+1)[\Gamma(\nu+1)]^2}$$
$$\times{}_2F_1[-n,\ \mu+\nu+n+1;\ \nu+1;\ (\sin\phi)^2]$$
$$\times{}_2F_1[-n,\ \mu+\nu+n+1;\ \nu+1;\ (\sin\Phi)^2],$$

μ, ν 不为負整数.

(Watson, 1944, p. 370; Bailey, 1929).

(9) $$z^\nu=2^\nu\Gamma(1+\tfrac{1}{2}\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2}z)^{\frac{1}{2}\nu+n}J_{\frac{1}{2}\nu+n}(z)/n!$$

(10) $\Gamma(\nu-\mu)J_\nu(z)$

$$=\Gamma(\mu+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-\mu+n)}{\Gamma(\nu+n+1)n!}(\tfrac{1}{2}z)^{\nu-\mu+n}J_{\mu+n}(z),$$

$\nu\neq\mu$, μ 不为负整数.

(11) $$J_\nu(z\cos\theta)J_\nu(z\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tfrac{1}{2}z\sin 2\theta)^{\nu+2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}J_{\nu+2n}(z),$$

ν 不为负整数.

(12) $$(z+h)^{\pm\frac{1}{2}\nu}J_\nu[(z+h)^{\frac{1}{2}}]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\pm\tfrac{1}{2}h)^m}{m!}z^{\pm\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}m}J_{\nu\mp m}(z^{\frac{1}{2}}),$$

$|h|<|z|$.

(13) $$(z+h)^{\pm\frac{1}{2}\nu}Y_\nu[(z+h)^{\frac{1}{2}}]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\pm\tfrac{1}{2}h)^m}{m!}z^{\pm\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}m}Y_{\nu\mp m}(z^{\frac{1}{2}}),$$

$|h|<|z|$,

(14) $$H_0^{(1)}[z(1-a)^{\frac{1}{2}}]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\tfrac{1}{2}az)^{m-\nu}H_{m-\nu}^{(1)}(z)/\Gamma(m-\nu+1),$$

(15) $H_1^{(1)}[z(1-a)^{\frac{1}{2}}]$

$$=(1-a)^{\frac{1}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\tfrac{1}{2}az)^{m-\nu}H_{m-\nu+1}^{(1)}(z)/\Gamma(m-\nu+1).$$

(16) $(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}\cos[(z^2-2zt)^{\frac{1}{2}}]$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}t^{m-\nu}J_{m-\nu-\frac{1}{2}}(z)/\Gamma(m-\nu+1),$$

(17) $(\tfrac{1}{2}\pi z)^{-\frac{1}{2}}\sin[(z^2+2zt)^{\frac{1}{2}}]$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}t^{m-\nu}J_{-(m-\nu-\frac{1}{2})}(z)/\Gamma(m-\nu+1),$$

(18) $(s^2-\tau^2)^{-\frac{1}{2}\nu}H_\nu^{(1)}[z(s^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}}]$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2}z\tau^2)^m s^{-\nu-m}H_{\nu+m}^{(1)}(zs)/m!$$

(19) $(s^2-\tau^2)^{-\frac{1}{2}\nu}K_\nu[z(s^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}}]$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2}z\tau^2)^m s^{-\nu-m}K_{\nu+m}(zs)/m!$$

(20) $$(\nu\pi)^{-1}\sin(\nu\pi)=J_\nu(z)J_{-\nu}(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{n+\nu}(z)J_{n-\nu}(z),$$

(21) $J_\nu(2z\cos\theta)=[J_{\frac{1}{2}\nu}(z)]^2+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{\frac{1}{2}\nu-n}(z)J_{\frac{1}{2}\nu+n}(z)\cos(2n\theta),$

$\operatorname{Re}\nu>0,\ -\tfrac{1}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant\tfrac{1}{2}\pi,$

(22) $[J_\nu(z)]^2=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}J_{\nu+n}(z)J_{\nu-n}(z),\qquad \operatorname{Re}z>0,$

(23) $J_{2\nu}(2z)$

$=\tfrac{1}{2}\pi z^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[n!\Gamma(3/2-n)]^{-1}J_{\nu+n}(z)J_{\nu-\frac{1}{2}+n}(z),$

(24) $J_0[x(t-t^{-1})^{\frac{1}{2}}]$

$=J_0(x)I_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[(-t)^n+t^{-n}]J_n(x)I_n(x)],$

(25) $J_0[x(t+t^{-1})]=[J_0(x)]^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(t^{2n}+t^{-2n})[J_n(x)]^2,$

(26) $\operatorname{ber}(2^{\frac{1}{2}}x)=J_0(x)I_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nJ_{2n}(x)I_{2n}(x),$

(27) $\operatorname{bei}(2^{\frac{1}{2}}x)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nJ_{2n+1}(x)I_{2n+1}(x).$

[其他例子見 Bailey, 1935, p. 235; Wise, 1935; Banerjee, 1939; Bateman & Rice, 1935; Fox, 1927; Rice, 1944; Rutgers, 1942; Nielsen, 1904, 19—21 章].

加法定理与有关級数

$w=(z^2+Z^2-2zZ\cos\phi)^{\frac{1}{2}}$, $C_n^\nu(z)$是蓋根堡多項式(見 3-15 節).

(28) $w^{-\nu}H_\nu^{(1),(2)}(w)$

$=(\tfrac{1}{2}zZ)^{-\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)C_n^\nu(\cos\phi)J_{\nu+n}(z)H_{\nu+n}^{(1),(2)}(Z),$

$\nu\neq0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ |ze^{\pm i\phi}|<|Z|,$

(29) $H_0^{(1),(2)}(w)$

$=J_0(z)H_0^{(1),(2)}(Z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(z)H_n^{(1),(2)}(Z)\cos(n\phi),$

$|ze^{\pm i\phi}|<|Z|.$

(30) $w^{-\nu}J_\nu(w)=(\frac{1}{2}zZ)^{-\nu}\Gamma(\nu)$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)C_n^\nu(\cos\phi)J_{\nu+n}(z)J_{n+\nu}(Z),$$

$\nu\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots$

(31) $J_0(w)=J_0(z)J_0(Z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(z)J_n(Z)\cos(n\phi),$

(32) $w^{-\nu}J_{-\nu}(w)=(\frac{1}{2}zZ)^{-\nu}\Gamma(\nu)$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+n)C_n^\nu(\cos\phi)J_{-\nu-n}(z)J_{\nu+n}(Z),$$

$\nu\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ |ze^{\pm i\phi}|<|Z|,$

設 $e^{i\psi}=(Z-ze^{i\phi})/w$ 及 $|ze^{\pm i\phi}|<|Z|$.

(33) $Y_\nu(w)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Y_{\nu+n}(Z)J_n(z)e^{in\phi},$

(34) $H_\nu^{(1),(2)}(w)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_{\nu+n}^{(1),(2)}(Z)J_n(z)e^{in\phi},$

(35) $K_\nu(w)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}K_{\nu+n}(Z)I_n(z)e^{in\phi},$

(36) $I_\nu(w)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nI_{\nu+n}(Z)I_n(z)e^{in\phi},$

(37) $(2z\sin\frac{1}{2}\phi)^{-\nu}J_\nu(2z\sin\frac{1}{2}\phi)$

$$=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)[z^{-\nu}J_{\nu+n}(z)]^2C_n^\nu(\cos\phi),$$

$\nu\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots$

(38) $J_0(2z\sin\frac{1}{2}\phi)=[J_0(z)]^2+2\sum_{n=1}^{\infty}[J_n(z)]^2\cos(n\phi),$

或

(39) $t^\nu J_\nu[z(t+t^{-1})]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^{2n}J_{\nu-n}(z)J_n(z),$

如 $\nu\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$, 則 $|t|<1$.

(40) $t^\nu I_\nu[z(t^{-1}-t)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nt^{2n}J_{\nu-n}(z)J_n(z),$

如 $\nu\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$, 則 $|t|<1$.

(41) $$(z^2+Z^2-2zZ\cos\phi)^{-1/2}\exp[\pm i(z^2+Z^2-2zZ\cos\phi)^{1/2}]$$
$$=\pm i\pi(zZ)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)J_{n+1/2}(z)H^{(1),(2)}_{n+1/2}(Z)P_n(\cos\phi),$$
$$|ze^{\pm i\phi}|<|Z|,$$

(42) $$(1/2 z)^{2\nu}\Gamma(2\nu)$$
$$=\Gamma(\nu)\Gamma(1+\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)\Gamma(2\nu+n)[J_{\nu+n}(z)]^2/n!,$$

(43) $$(\sin\alpha\sin\beta)^{1/2-\nu}J_{\nu-1/2}(z\sin\alpha\sin\beta)e^{iz\cos\alpha\cos\beta}$$
$$=2^{2\nu-1/2}(\pi z)^{-1/2}[\Gamma(\nu)]^2$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n n!(\nu+n)}{\Gamma(2\nu+n)}J_{\nu+n}(z)C_n^{\nu}(\cos\alpha)C_n^{\nu}(\cos\beta),$$

(44) $$\cos(z\cos\phi)$$
$$=2^{\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)z^{-\nu}J_{\nu+2n}(z)C_{2n}^{\nu}(\cos\phi).$$

(45) $$\sin(z\cos\phi)$$
$$=2^{\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n+1)z^{-\nu}J_{\nu+2n+1}(z)C_{2n+1}^{\nu}(\cos\phi).$$

卡普頓型級数

(46) $$\nu\pi J_\nu(\nu z)=\sin\nu\pi\,[1-2\nu^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nJ_n(nz)/(n^2-\nu^2)],$$

(47) $$\nu\pi E_\nu(\nu z)=2(\sin 1/2\nu\pi)^2-4\nu^2$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}[\sin(1/2\nu\pi+1/2 n\pi)]^2J_n(nz)/(n^2-\nu^2),$$

(48) $$(1-z^2)^{-1/2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}[J_n(nz)]^2.$$

(49) $$[(1-z^2)^{-1/2}-1]=\sum_{n=0}^{\infty}J_n[(n+1/2)z]J_{n+1}[(n+1/2)z],$$

(50) $$z^{-1}\sin z=1-z\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)^{-1}[J_n(nz)]^2,$$

(51) $$(1-z)^{-1}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(nz),$$

許洛米耳及有关級数

(52) $$\Gamma(\nu+1)\sum_{m=1}^{\infty}\cos(mt)(\tfrac{1}{2}mx)^{-\nu}J_{\nu}(mx)=-\tfrac{1}{2},\qquad 0<x<t\leqslant\pi,$$

$$=\tfrac{1}{2}+\pi^{\frac{1}{2}}x^{-1}(1-t^2/x^2)^{\nu-\frac{1}{2}},\qquad 0<t<x<\pi,$$

$$\operatorname{Re}\nu>-\tfrac{1}{2},\ \text{(Cooke, 1928)}.$$

(53) $$\sum_{m=1}^{\infty}(\tfrac{1}{2}mx)^{-\mu}J_{\mu}(mx)(\tfrac{1}{2}my)^{-\nu}J_{\nu}(my)$$
$$=-[2\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)]^{-1}$$
$$+\pi^{\frac{1}{2}}[y\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})]^{-1}{}_2F_1(\tfrac{1}{2}-\nu,\tfrac{1}{2};\mu+1;x^2/y^2),$$
$$\pi>y>x>0,\ \mu,\nu>-\tfrac{1}{2},\ \text{(Cooke, 1928)}.$$

(54) $$\Gamma(\nu+\tfrac{3}{2})\sum_{m=1}^{\infty}\cos(mt)(\tfrac{1}{2}mx)^{-\nu-1}\mathbf{H}_{\nu}(mx)=-(\nu+\tfrac{1}{2})\pi^{-\frac{1}{2}},$$
$$0<x<t\leqslant\pi,\ \operatorname{Re}\nu>-1\ \text{(Cooke, 1930, p. 58)},$$
$$=-\pi^{-\frac{1}{2}}+\pi^{\frac{1}{2}}x^{-1}(1-t^2/x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}{}_2F_1(\nu+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2};\ \nu+\tfrac{3}{2};$$
$$1-t^2/x^2),\quad 0<t<x<\pi,\ \operatorname{Re}\nu>-1\ \text{(Cooke, 1930, p. 58)}.$$

(55) $$x^{\nu}=-2\Gamma(\nu+1)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(\tfrac{1}{2}\pi/a)^{-\nu}m^{-\nu}J_{\nu}(m\pi x/a),$$
$$0<x<a,\ \nu>0.$$

(56) $$\pi J_{\nu}(x)=2^{3-\nu}\sum_{m=1}^{\infty}m^{1-\nu}(4m^2-1)^{-1}\mathbf{H}_{\nu}(2mx),$$
$$0<x<\pi,\ \nu>-\tfrac{1}{2}.$$

(57) $$x^{\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}-\pi\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}a)^{1-\nu}\mathbf{H}_{\nu}(ax)$$
$$+\pi i\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}a)^{1-\nu}J_{\nu}(ax)$$
$$=2\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\sum_{m=1}^{\infty}m(m^2-a^2)^{-1}[1-(-1)^m e^{iax}]$$
$$\times(\tfrac{1}{2}m)^{1-\nu}J_{\nu}(mx),\qquad 0<x<\pi,\ \nu\geqslant\tfrac{1}{2}.$$

(55)至(57)式見 Pennel (1932).

富里哀-貝塞尔型級数

在下面的公式中，ν 及 z 都是任意的，但 $\nu\neq-1,-2,-3,\cdots$.

$z^{-\nu}J_\nu(z)$ 的零点按 $\mathrm{Re}\,(\gamma_{\nu,n})>0$ 的大小的升序排列时为 $\pm\gamma_{\nu,n}(n=1,2,3,\cdots)$. 于是 (Buchholz, 1947):

(58) $$\frac{\pi J_\nu(xz)}{4J_\nu(z)}[J_\nu(z)Y_\nu(Xz)-J_\nu(Xz)Y_\nu(z)]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}J_\nu(x\gamma_{\nu,n})J_\nu(X\gamma_{\nu,n})[J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})]^{-2}(z^2-\gamma_{\nu,n}^2)^{-1},$$
$$0\leqslant x\leqslant X\leqslant 1.$$

(59) $$J_\nu(xz)/J_\nu(z)$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{\nu,n}J_\nu(x\gamma_{\nu,n})[(\gamma_{\nu,n}^2-z^2)J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})]^{-1}$$
$$=x^\nu+2z^2\sum_{n=1}^{\infty}J_\nu(\gamma_{\nu,n}x)[\gamma_{\nu,n}(\gamma_{\nu,n}^2-z^2)J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})]^{-1},$$
$$0\leqslant x<1.$$

(60) $$J_{\nu+1}(xz)/J_\nu(z)$$
$$=2z\sum_{n=1}^{\infty}J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n}x)[(\gamma_{\nu,n}^2-z^2)J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})]^{-1},$$

(61) $$\tfrac{1}{2}\ln X=-\sum_{n=1}^{\infty}J_0(x\gamma_n)J_0(X\gamma_n)[\gamma_nJ_1(\gamma_n)]^{-2},$$
$$0\leqslant x\leqslant X\leqslant 1,\ \gamma_n=\gamma_{0,n}.$$

(62) $$[J_0(z)]^{-1}$$
$$=1-2\sum_{n=1}^{\infty}[\gamma_{0,n}(z^2-\gamma_{0,n}^2)^{-1}+\gamma_{0,n}^{-1}][J_1(\gamma_{0,n})]^{-1},$$

(63) $$[J_0(z)]^{-2}$$
$$=1+4\sum_{n=1}^{\infty}[\gamma_{0,n}^2(z^2-\gamma_{0,n}^2)^{-2}+(z^2-\gamma_{0,n}^2)^{-1}][J_1(\gamma_{0,n})]^{-2},$$

(64) $$[J_1(z)]^{-1}=2z^{-1}+2z\sum_{n=1}^{\infty}[(z^2-\gamma_{1,n}^2)^{-1}[J_0(\gamma_{1,n})]^{-1},$$

(65) $$[J_1(z)]^{-2}=4z^{-2}+1$$
$$+4\sum_{n=1}^{\infty}[\gamma_{1,n}^2(z^2-\gamma_{1,n}^2)^{-2}+(z^2-\gamma_{1,n}^2)^{-1}][J_0(\gamma_{1,n})]^{-2},$$

对于(62)至(65)式,可参看 Forsyth (1921).

参考文献

Airey, J. R., 1916: *Philos. Mag.* 31, 520-528; 32, 7-14, 237-238.

Airey, J. R., 1935: *Philos. Mag.* 19, 230-235.

Airey, J. R., 1935 a: *Philos. Mag.* 19, 236-243.

Airey, J. R., 1937: *Philos. Mag.* 24, 521-552.

Bailey, W. N., 1929: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 25, 48-49.

Bailey, W. N., 1929 a: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 26, 82-87.

Bailey, W. N., 1930: *Proc. London Math. Soc.* (2), 30, 415-421.

Bailey, W. N., 1930 a: *Proc. London Math. Soc.* (2), 30, 422-424.

Bailey, W. N., 1930 b: *J. London Math. Soc.* 5, 258-265.

Bailey, W. N., 1930 c: *Proc. London Math. Soc.* (2), 31, 200-208.

Bailey, W. N., 1932: *Proc. London Math. Soc.* 33, 154-159.

Bailey, W. N., 1935: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 6, 233-238.

Bailey, W. N., 1935 a: *Proc. London Math. Soc.* (2), 40, 37-48.

Bailey, W. N., 1936: *J. London Math. Soc.* 11, 16-20.

Bailey, W. N., 1937: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 6, 241-248.

Bailey, W. N., 1938: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 9, 141-147.

Banerjee, D. P., 1935: *J. Indian Math. Soc.*, N. S., 1, 266-268.

Banerjee, D. P., 1936: *J. Indian Math. Soc.*, N. S., 2, 211-212.

Banerjee, D. P., 1939: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 10, 261-265.

Basu, K., 1923: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 14, 25-30.

Bateman, Harry and S. O. Rice, 1935: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 21, 173-179.

Baudoux, P., 1945: *Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci.* (31), 471-478.

Baudoux, P., 1945 a: *Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci.* (31), 669-681.

Baudoux, P., 1946: *Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci.* (32), 127-131.

Bell, E. T., 1926: *Philos. Mag.* 1, 304-312.

Bennet, W. R., 1932: *Bull. Amer. Math. Soc.* 38, 843-848.

Bickley, W. G., 1943: *Philos. Mag.* 34, 37-49.

Bickley, W. G. and J. C. P. Miller, 1945: *Philos. Mag.* 36, 121-133; 200-210.

Bijl, Jan, 1937: *Dissertation Groningen.*

Birkhoff, G. D., 1908: *Trans. Amer. Math. Soc.* 9, 219-231.

Blumenthal, Otto, 1912: *Arch. der Math. und Phys.* 19, 136-152.

Boas, R. P., 1942: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 28, 21-27.

Boas, R. P., 1942 a: *Bull. Amer. Math. Soc.* 48, 286-294.

Bose, B. N., 1944: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 36, 126.

Bose, B. N., 1945: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 37, 77.

Bose, B. N., 1948: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 40, 8-14.

Bose, S. K., 1946: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 38, 177-180.

Bose, S. K., 1946 a: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 38, 181-184.

Bradley, W. F., 1936: *Proc. London Math. Soc.* 31, 209-214.

Bruijn, N. G., 1948: *Philos. Mag.* 39, 134-140.

Bruijn, N. G., 1950: *Duke Math. J.* 17, 197-225.

Buchholz, Herbert, 1939: *Philos. Mag.* 27, 407-420.

Buchholz, Herbert, 1947: *Z. Angew. Math. Mech.* 25/27, 245-252.

Budden, R. F., 1926: *Proc. London Math. Soc.* 24, 471-478.

Burchnall, J. L., 1951: *Canadian J. Math.* 3, 62-68.

Burnett, B. H., 1929: *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 26, 145-151.

Busbridge, I. W., 1938: *Proc. London Math. Soc.* (2) 44, 115-129.

Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger, 1940: *Proc. London Math. Soc.* 46, 361-388.

Chaundy, T. W., 1931: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 2, 144-154.

Cherry, T. M., 1949: *J. London Math. Soc.* 24, 121-130.

Cherry, T. M., 1949 a: *Proc. London Math. Soc.* 51, 14-45.

Cherry, T. M., 1950: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 86, 224-257.

Cooke, R. G., 1925: *Proc. London Math. Soc.* 24, 381-420.

Cooke, R. G., 1927: *Proc. London Math. Soc.* 27, 171-192.

Cooke, R. G., 1928: *Proc. London Math. Soc.* 28, 207-241.

Cooke, R. G., 1929: *J. London Math. Soc.* 4, 18-21.

Cooke, R. G., 1930: *J. London Math. Soc.* 5, 54-58.

Cooke, R. G., 1930 a: *J. London Math. Soc.* 5, 58-61.

Cooke, R. G., 1930 b: *Proc. London Math. Soc.* 30, 144-164.

Cooke, R. G., 1932: *J. London Math. Soc.* 7, 281-283.

Cooke, R. G., 1936: *Proc. London Math. Soc.* 41, 176-190.

Cooke, R. G., 1937: *J. London Math. Soc.* 12, 180-185.

Copson, E. T., 1932: *Proc. London Math. Soc.* (2) 33, 145-153.

Copson, E. T., 1933: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 4, 134-139.

Copson, E. T., 1935: *Functions of a complex variable*, Oxford.

Copson, E. T., and W. L. Ferrar, 1937: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 5, 160-168.

Corput, Van der, J. G., 1934: *Compositio Math.* 1, 15-38.

Corput, Van der, J. G., 1936: *Compositio Math.* 3, 328-372.

Costello, J. C., 1936: *Philos. Mag.* 2, 308-318.

Coulomb, M. J., 1936: *Bull. Sci. Math.* 60, 297-302.

Crum, M. M., 1940: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 11, 49-52.

Dalzell, D. P., 1945: *J. London Math. Soc.* 20, 213-218.

Davis, H. T., 1924: *Amer. J. Math.* 46, 95-109.

Debye, Peter, 1909: *Math. Ann.* 67, 535-558.

Dixon, A. L., and W. L. Ferrar, 1930: *Quart. J. Math. Oxford Sor.* 1, 122-145.

Dixon, A. L., and W. L. Ferrar, 1930 a: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 1, 236-238.

Dixon, A. L., and W. L. Ferrar, 1933: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 4, 193-208; 297-304.

Dixon, A. L., and W. L. Ferrar, 1935: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 6, 166-174.

Dixon, A. L., and W. L. Ferrar, 1937: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 8, 66-74.

Doetsch, Gustav, 1935: *Compositio Math.* 1, 85-87.

Doetsch, Gustav, 1937: *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, J. Springer, Berlin.

Dougall, John, 1919: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 37, 33-47.

Emde, Fritz, and Rudolf Rühle, 1934: *Jber. Deutsch. Verein* 43.

Emde, Fritz, 1937: *Z. Angew. Math. Mech.* 17, 324-346.

Emde, Fritz, 1939: *Z. Angew. Math. Mech.* 19, 101-118.

Erdélyi, Arthur, 1937: *Compositio Math.* 4, 406-423.

Erdélyi, Arthur, 1939: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 6, 94-104.

Erdélyi, Arthur, and W. O. Kermack, 1945: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 41, 74-75.

Falkenberg, Hans, 1932: *Math. Z.* 35, 457-463.

Falkenberg, Hans and Ernst Hilb, 1916: *Goettinger Machrichten*, p. 190-196.

Ferrar, W. L., 1937: *Compositio Math.* 4, 394-405.

Fock, V., 1934 *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS* N. S. 1, 99-102.

Forsyth, A. R., 1921: *Messenger of Math.* 50, 129-149.

Fox, Cyril, 1926: *Proc. London Math. Soc.* 24, 479-493.

Fox, Cyril, 1927: *Proc. London Math. Soc.* 26, 35-87; 201-210.

Fox, Cyril, 1929: *Proc. Cambridge, Philos. Soc.* 25, 130-131.

Gatteschi, L., 1950: *Revista di Mathematicadella Universita di Parma*, 1, 347-362.

Gray, Andrew, and G. B. Mathew, 1922: *A treatise on Besselfunctions*, Macmillan & Co., Ltd., London.

Greenwood, R. E., 1941: *Ann. Of Math.* 42, 778-805.

Gupta, H. C., 1943: *Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A*, 13, 225-231.

Gupta, H. C., 1943 a: *Proc. Benares Math. Soc.* 5, 1-16.

Gupta, H. C., 1943 b: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 35, 7-11.

Hardy, G. H., 1921: *Messenger of Math.* 50, 165-171.

Hardy, G. H., 1925: *Proc. London Math. Soc.* 23, IX.

Hardy, G. H., 1926: *Messenger of Math.* 55, 140-144.

Hardy, G. H., 1927: *Messenger of Math.* 56, 186-192.

Hardy, G. H., 1927 a: *Messenger of Math.* 57, 113-120.

Hardy, G. H., and E. C. Titchmarsh, 1933: *Proc. London Math. Soc.* 35, 116-155.

Hilb, Ernst, 1922: *Math. Z.* 15, 274-279.

Hille, Einar and Gábor Szegö, 1943: *Bull. Amer. Math. Soc.* 49, 605-610.

Hillmann, Abraham, 1949: *Bull. Amer. Math. Soc*, 55, 198-200.

Horn, Jakob, 1899: *Math. Ann.* 52, 271-292.

Horton, C. W., 1950: *J. Math. Physics* 29, 31-37.

Ince, E. L., 1944: *Ordinary differential equations*, Longmans.

Infield, L., Smith, V. G. and W. Z. Chien, 1947: *J. of Math. and Phys.* 26, 22-28.

Jahnke, Eugene, and Fritz Emde, 1938: *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, B. G. Teubner and 1945, New York.

Jeffreys, Harold, 1925: *Proc. London Math. Soc.* 23, 428-436.

Jesmanowicz, L., 1938: *C. R. Soc. Sci. Varsovie*, 31, 43-59.

Jordan, Henri, 1930: *J. Reine Angew. Math.* 162, 17-59.

Kamke, Erich, 1948: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea, New York.

King, L. V., 1935: *Proc. Roy. Soc. A.* 153, 1-16.

King, L. V., 1936: *Philos. Mag.* (7) 21, 118-144.

Kishore, Raj, 1929: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 21, 187-190.

Klein, Felix, 1933: *Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion*, J.

R. Springer, Berlin.

Kline, Morris, 1948: *J. Math. Phys.* 27, 37-48.

Kline, Morris, 1950: *Proc. Amer. Math. Soc.* 1, 543-552.

Kober, Hermann, 1935: *Math. Z.* 39, 609-624.

Kober, Hermann, 1937: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 8, 186-199.

Kontorowich, M. J. and N. N. Lebedev, 1938: *Ž. eksper, Teor. Fizike, Moskwa, Leningrad* 8, 1192-1206.

Korn, Arthur, 1931: *S. B. Preuss. Akad. Wissensch. Phys. Math. Kl. H.* 22/23, 437-449.

Koshliakov, N. S., 1926: *Messenger of Math.* 55, 152-160.

Krall, H. L., and O. Frink, 1949: *Trans, Amer. Math. Soc.* 65, 100-115.

Lambe, C. G., 1931: *J. London Math. Soc.* 6, 257-259.

Langer, R. E., 1931: *Trans. Amer. Math. Soc.* 33, 23-64.

Langer, R. E., 1932: *Trans. Amer. Math. Soc.* 34, 447-480.

Langer, R. E., 1934: *Bull. Amer. Math. Soc.* 40, 545-582.

Lebedev, N. N., 1946: *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.)* 52, 655-658.

Lebedev, N. N., 1947: *Doklady Akad. Nauk SSSR* (N. S.) 58, 1007-1010.

Lehmer, D. H., 1944: *Math. tables and other aids to computation* 1, 133-134.

Lense, Josef, 1933: *Jber. Deutsch. Math. Verein* 43, 146-153.

Luke, Y. L., 1950: *J. Math. Physics* 29, 27-30.

McLachlan, N. W., 1934: *Bessel functions for engineers*, Oxford.

McLachlan, N. W., and A. L. Meyers, 1936: *Philos. Mag.* 21, 425-436, 437-443.

McLachlan, N. W. and A. L. Meyers, 1937: *Philos. Mag.* 23, 762-774.

McLachlan, N. W., 1938: *Philos. Mag.* 26, 394-408, 457-473.

MacRobert, T. M., 1930: *Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. II* 1, 28.

MacRobert, T. M., 1931: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 51, 116-126.

MacRobert, T. M., 1936: *Philos. Mag.* 21, 697-703.

MacRobert, T. M., 1937: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 57, 19-25.

MacRobert, T. M., 1940: *Quart. J. Math. Oxford Ser. II*, 95-99.

MacRobert, T. M., 1947: *Functions of a complex variable*, Macmillan & Co., Ltd., London.

Magnus, Wilhelm and Fritz Oberhettinger, 1948: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik*, second edition,

Springer.

Mayr, K., 1932: *Akad. Wiss. Wien. S. B.* 141, 227-265.

Mayr, K., 1933: *Akad. Wiss. Wien. S. B.* 142, 1-17.

Mayr, K., 1935: *Akad. Wiss. Wien. S. B.* 144, 277-292.

Mcdonald, J. H., 1926: *Trans. Amer. Math. Soc.* 28, 384-390.

Meijer, C. S., 1932: *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 35, 656-667, 852-866, 948-958. 1079-1096.

Meijer, C. S., 1933: *Math. Ann.* 108, 321.

Meijer, C. S., 1933 a: *Dissertation Groningen.*

Meijer, C. S., 1934: *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 37, 805-812.

Meijer, C. S., 1935: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 6, 241-243, 528-535.

Meijer, C. S., 1935 a: *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 38, 628-334, 744-749.

Meijer, C. S., 1935 b: *Proc. London Math. Soc.* 40, 1-22.

Meijer, C. S., 1936: *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 39, 394-403, 519-527.

Meijer, C. S., 1936 a: *Math. Ann.* 112, 469-489.

Meijer, C. S., 1938: *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 41, 151-154.

Meijer, C. S., 1939: *Compositio Math.* 6, 348-367.

Meijer, C. S., 1939 a: *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 42, 355-369, 872-879, 938-947.

Meijer, C. S., 1940: *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 43, 198-210, 366-378, 599-608, 702-711.

Meixner, Josef, 1949: *Math. Nach.* 3, 9-13.

Mitra, Subodchandra, 1925: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 15, 83-85.

Mitra, Subodchandra, 1933: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 25, 81-98.

Mitra, Subodchandra, 1936: *Math. Z.* 41, 680-685,

Mohan, Brij, 1942: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 34, 55-59, 171-175.

Mohan, Brij, 1942 a: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 13, 40-47.

Mohan, Brij, 1942 b: *Proc. Nat. Acad. Sci. India* 12, 231-235.

Montroll, E. W., 1946: *J. Math. Physics* 25, 37-49.

Moore, C. N., 1920: *Trans. Amer. Math. Soc.* 21, 107-156.

Moore, C. N., 1926: *Trans. Amer. Math. Soc.* 12, 181-206.

Moore, C. N., 1930: *Trans. Amer. Math. Soc.* 32, 408-416.

Mordell, L. J., 1930: *J. London Math. Soc.* 5, 203-208.

Müller, R., 1940: *Z. Angew. Math. Mech.* 20, 61-62.

Newson, C. V. and A. Frank, 1940: *Bull. Mat.* 13, 11-14.

Nicholson, J. W., 1920: *Quart. J. Math.* 48, 321-329.

Nicholson, J. W., 1924: *Philos, Trans. Roy. Soc. A*, 224, 303-369.

Nicholson, J. W., 1927: *Quart. J. Math.* 50, 297-314.

Nielsen, Niels, 1904: *Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen*, Leipzig, B. G. Teubner.

Obreschkoff, Nikolai, 1929: *Jber. Deutsch Math. Verein.*, 38, 156-161.

Olver, F. W. J., 1950: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 46, 570-580.

Pennel, W. O., 1932: *Bull. Amer. Math. Soc.* 38, 115-122.

Picht, Johannes, 1949: *Z. Angew. Math. Mech.* 29, 155-157.

Pol, Balthasar van der, and K.F. Niessen, 1932: *Philos. Mag.* 13, 537-572.

Pólya, Georg, 1926: *J. London Math. Soc.* 1, 98-99.

Pólya, Georg, 1929: *Jber. Deutsch, Math. Verein*, 38, 161-168.

Poole, E. C., 1934: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 5, 186-194.

Rayleigh, J., W., 1945: *The theory of sound*, Dover, New York.

Ramanujan, Srinivasa, 1920: *Quart. J. Math.* 48, 294-310.

Ramanujan, Srinivasa, 1927: *Collected papers*, Cambridge.

Rice, S. O., 1935: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 6, 52-64.

Rice, S. O., 1944: *Philos. Mag.* 35, 686-693.

Rosen, Joseph, 1939: *Tohoku Math. J.* 45, 230-238.

Rutgers, J. G., 1931: *Nederl. Akad. Wetensch, Proc.* 34, 148-159; 239-256; 427-437.

Rutgers, J. G., 1941: *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 44, 464-474. 636-647; 744-753; 840-851; 978-988; 1092-1098.

Rutgers, J. G., 1942: *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 45, 929-936; 987-993.

Schlesinger, Ludwig, 1907: *Math. Ann.* 63, 277-300.

Schöbe, Waldemar, 1948: *Arch. Math.* 1, 230-232.

Shabde, N. G., 1935: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 27, 165-170.

Shabde, N. G., 1938: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 30, 29-30.

Shabde, N. G., 1939: *Proc. Benares Math. Soc.* 1, 55-59.

Shastri, N. A., 1938: *Philos. Mag.* 25, 930-950.

Siegel, C. L., 1929: *Abh. Preuss, Akad. Wiss. Nr.* 1.

Sinha, S., 1942-43: *Bull. Calcutta, Math. Soc.* 34, 35, 67-77; 37-42.

Sircar, H., 1945: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 37, 1-4.

Sommerfeld, Arnold, 1943: *Ann. Phys.* 42, 389-420.

Stevenson, Georg, 1928: *Amer. J. Math.* 50, 569-590.

Stone, M. H., 1927: *Ann. Math.* (2) 28; 271-290.

Straubel, Rudolph, 1941: *Ing. Arch.* 12, 325-336.

Straubel, Rudolph, 1942: *Ing. Arch.* 13, 14-20.

Svetlov, A., 1934: *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS.* (2), 445-448.

Szász, Otto, 1950: *Proc. Amer. Math. Soc.* 1, 256-267.

Szegö, Gábor, 1933: *Proc. London Math. Soc.* 36, 427.

Szymanski, Piotr, 1935: *Proc. London Math. Soc.* 40, 71-82.

Temple, G., 1927: *Proc. London Math. Soc.* 26, 518-530.

Thielmann, H. P., 1929: *Proc. U. S. A. Acad.* 15, 731-733.

Thielmann, H. P., 1934: *Bull. Amer. Math. Soc.* 40, 695-698.

Titchmarsh, E. C., 1923: *Proc. London Math. Soc.* 22, 15-28.

Titchmarsh, E. C., 1923 a: *Proc. London Math. Soc.* 22, xiii-xvi.

Titchmarsh, E. C., 1925: *Proc. London Math. Soc.* 23, xii.

Titchmarsh, E. C., 1927: *J. London Math. Soc.* 2, 97-99.

Titchmarsh, E. C., 1946: *Eigenfunction expansions*, Oxford.

Titchmarsh, E. C., 1948: *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford.

Tranter, C. J., 1951: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 2, 60-66.

Tricomi, Francesco, 1935: *Rend. Lincei*, (6), 22, 564-576.

Tricomi, Francesco, 1949: *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* 83, 3-20.

Truesdell, C. A., 1947: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 33, 82-93.

Truesdell, C. A., 1948: *A unified theory of special functions*, Princeton University Press, Princeton, N. J.

Varma, D. S., 1936: *Proc. London Math. Soc.* 42, 9-17.

Varma, D. S., 1936 a: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 28, 209-211.

Veen, S. C., 1927: *Math. Ann.* 97, 696-710.

Watson, G. N., 1928: *J. London Math. Soc.* 3, 22-27.

Watson, G. N., 1931: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 2, 298-309.

Watson, G. N., 1934: *J. London Math. Soc.* 9, 16-22.

Watson, G. N., 1938: *J. London Math. Soc.* 13, 41-44.

Watson, G. N., 1944: *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge.

Weinstein, Alexander, 1948: *Trans. Amer. Math. Soc.* 63, 342-354.

Weyrich, Rudolf, 1937: *Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen*, Leipzig, B. G. Teubner.

Whittaker, E. T. and G. N. Watson, 1946: *A course of modern analysis*, Cambridge.

Widder, D. V., 1941: *The Laplace transform*, University Press, Princeton, N. J.

Wilkins, J. E., 1948: *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, 232-234.

Wilkins, J. E., 1948 a: *Trans. Amer. Math. Soc.* 64, 359-385.

Wilkins. J. E., 1950: *Trans. Amer. Math. Soc.* 69, 55-65.

Wilkins, J. E., 1950 a: *Amer. J. Math.* 75, 187-191.

Wilson, R., 1939: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 6, 17-18.

Wilton, J. R., 1925: *Proc. London Math. Soc.* 23, VIII.

Wilton, J. R., 1927: *Messenger of Math.* 56, 175-181.

Wilton, J. R., 1928: *Proc. London Math. Soc.* 27, 81-104.

Wilton, J. R., 1928 a: *J. Math.* 159, 144-153.

Wise, W. H., 1935: *Bull. Amer. Math. Soc.* 41, 700-706.

Wright, E. M., 1934: *Proc. London Math. Soc.* 28, 257-270.

Wright, E. M., 1940: *Philos. Trans. Royal Soc.* (*A*) 238, 423-451.

Wright, E. M., 1940 a: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 11, 36-48.

Young, L. C., 1941: *Proc. London Math. Soc.* 47, 290-308.

Young, W. H., 1912: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 43, 161-177.

Young, W. H,, 1920: *Proc. London Math. Soc.* 18, 163-200.

第八章　抛物柱函数及迴轉抛物面函数

8-1. 引言

設 x_1, x_2, x_3, 为三維空間中的笛卡尔坐标,我們把抛物柱坐标 ξ, η, ζ, 定义如下:

(1) $x_1 = \xi\eta,\ x_2 = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2,\ x_3 = \zeta$

并把迴轉抛物面坐标 ξ, η, ϕ 定义为

(2) $x_1 = \xi\eta\cos\phi,\ x_2 = \xi\eta\sin\phi,\ x_3 = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2.$

設

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

为拉普拉斯算符,并設 f 为 x_3 單独一数的任一函数. 偏微分方程

(3) $\Delta u + f(x_3)u = 0$

变换为抛物柱坐标时为

$$(4)\qquad (\xi^2+\eta^2)^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2} + f(\zeta)u = 0.$$

这一方程具有特解,其形为 $U(\xi)V(\eta)W(\zeta)$, 这里 U, V, W 滿足下面的常微分方程:

$$(5)\qquad \frac{d^2U}{d\xi^2} + (\sigma\xi^2+\lambda)U = 0,\ \frac{d^2V}{d\eta^2} + (\sigma\eta^2-\lambda)V = 0,$$

$$(6)\qquad \frac{d^2W}{d\zeta^2} + [f(\zeta)-\sigma]W = 0,$$

式中 σ, λ 为任意常数. 又,如設 k^2 为常数,則偏微分方程

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

变换为迴轉抛物面坐标时为

$$(7)\qquad (\xi^2+\eta^2)^{-2}\left[\xi^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\eta^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\right]+(\xi\eta)^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0.$$

这一方程具有特解的形式为 $U(\xi)V(\eta)W(\phi)$，此处的 U 满足常微分方程

$$(8)\qquad \frac{d^2U}{d\xi^2}+\xi^{-1}\frac{dU}{d\xi}+(k^2\xi^2-4\mu^2\xi^{-2}+\lambda)U=0.$$

V 满足一与 (8) 式相似的方程，但 λ 的符号相反，而 W 则满足

$$(9)\qquad \frac{d^2W}{d\phi^2}+4\mu^2W=0.$$

对于在抛物面 $\xi=$ 常数或 $\eta=$ 常数上單值而連續的解，2μ 应为一整数.

在大于三維的空間中，对于 (3) 式的研究，有几种推廣是可能的. 其中有几种可参看 P. Humbert (1920 a, b, c, d.)

(5) 和 (8) 式的解可以用合流超比函数來表示. 虽然，(8) 式中有二个基本上独立的常数，因而和合流超比方程 6-1(2) 本身同样的具有一般性，但是，2μ 为整数及 k, λ 为实数的特殊情形，在某些边値問題中顯得特别重要. 这些特殊情形以及 (5) 式的解將在本章中討論.

抛 物 柱 函 数

8-2. 定义和基本性質

經过簡單的变量变换后，8-1(5) 式可轉变为

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dz^2}+(\nu+½-¼z^2)y=0.$$

方程 (1) 的解称为**抛物柱函数**或**韋勃-漢米特函数**. 它們可用合流超比函数來表示。如定义

(2)　$D_\nu(z) = 2^{\frac{1}{2}(\nu-1)} e^{-\frac{1}{4}z^2} z \Psi(\frac{1}{2}-\nu/2; 3/2; z^2/2)$

(3)　$= 2^{\frac{1}{2}(\nu+\frac{1}{2})} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}(\nu+\frac{1}{2}), -\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}z^2)$

(4)　$$= 2^{\frac{1}{2}\nu} e^{-z^2/4} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)} \Phi(-\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}z^2) + \frac{z}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2}\nu)} \Phi(\tfrac{1}{2}-\nu/2; 3/2; z^2/2) \right]$$

[記法見 6-1(1), 6-9(2) 及 6-5 節], 則可知

(5)　$D_\nu(z),\ D_\nu(-z),\ D_{-\nu-1}(iz),\ D_{-\nu-1}(-iz)$

滿足方程(1). $D_\nu(z)$ 在 $z=0$ 处的値及其導数値可从 (4) 式中求得. 因为方程 (1) 的一个解可由它在 $z=0$ 处的値及其導数値來完全确定, 而且由于方程 (1) 精确地具有二个綫性独立解, 因此, 我們可求得下面的关系:

(6)　$$D_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} [e^{\nu\pi i/2} D_{-\nu-1}(iz) + e^{-\nu\pi i/2} D_{-\nu-1}(-iz)]$$

(7)　$$= e^{-\nu\pi i} D_\nu(-z) + \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)} e^{-(\nu+1)\pi i/2} D_{-\nu-1}(iz)$$

(8)　$$= e^{\nu\pi i} D_\nu(-z) + \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)} e^{(\nu+1)\pi i/2} D_{-\nu-1}(-iz)$$

以及另外一些从上面关系中以 $-z$ 代 z 而得的关系式. 这些关系式表明 (5) 式中的任三个解是怎样彼此关連的.

抛物柱函数是 z 的整函数. 如 $\nu=n$ 为一非負整数, 則从 (4) 可知

(9)　$e^{z^2/4} D_n(z) = 2^{-\frac{1}{2}n} H_n(2^{-\frac{1}{2}}z)$

是一个多項式; $H_n(x)$ 称为 n 次漢米特多項式(見第10章). 如 ν 为非整数, 則 $D_\nu(z)$ 与 $D_\nu(-z)$ 綫性無关. 对于 ν 的所有值, $D_\nu(z)$ 及 $D_{-\nu-1}(\pm iz)$ 都是綫性無关的. 隆司基行列式为

(10)　$$D_\nu(z) \frac{d}{dz} D_\nu(-z) - D_\nu(-z) \frac{d}{dz} D_\nu(z) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} / \Gamma(-\nu),$$

(11)　$$D_\nu(z) \frac{d}{dz} D_{-\nu-1}(iz) - D_{-\nu-1}(iz) \frac{d}{dz} D_\nu(z) = -i \exp(-\tfrac{1}{2}\nu\pi i).$$

如 ν 及 z 为实数，则 $D_\nu(z)$ 的值也是实数．对于微分方程 8-1(5)，如果 σ, λ 为实数，我們也可以用 D_ν 來表示出它的实值而綫性独立的解．如設 $\sigma>0$，則可將 8-1(5) 变换为

$$(12) \quad \frac{d^2y}{dx^2}+(\tfrac{1}{4}x^2-\rho)y=0$$

这里 $\xi=(4\sigma)^{-1/4}x$, $\rho=-\lambda(4\sigma)^{-1/2}$，于是知

$$(13) \quad D_{i\rho-1/2}\left(\pm\frac{1+i}{2^{1/2}}x\right)$$

的实部和虛部满足方程(12)．方程(12)在实軸上为实数的其他解組为:

$$\frac{\Gamma(3/4-1/2\rho)}{2^{1/2 i\rho+3/4}\pi^{1/2}}\left[D_{i\rho-1/2}(e^{i\pi/4}x)+D_{i\rho-1/2}(-e^{i\pi/4}x)\right]=y_0(x),$$

$$-\frac{\Gamma(1/4-1/2 i\rho)}{2^{1/2 i\rho+3/4}\pi^{1/2}(1+i)}\left[D_{i\rho-1/2}(e^{i\pi/4}x)+D_{i\rho-1/2}(-e^{i\pi/4}x)\right]=y_1(x),$$

$$\mathrm{Re}\{2^{1/2}e^{3\pi\rho/4}[(1+e^{-2\pi\rho})^{1/2}-1]^{1/2}e^{-i(\gamma'/2+\pi/8)}D_{i\rho-1/2}(xe^{i\pi/4})\}=y_2(x),$$

$$-\mathrm{Im}\{2^{1/2}e^{3\pi\rho/4}[(1+e^{-2\pi\rho})^{1/2}+1]^{1/2}e^{-i(\gamma'/2+\pi/8)}D_{i\rho-1/2}(xe^{i\pi/4})\}$$
$$=y_3(x).$$

式中 $\gamma'=\arg\Gamma(1/2+i\rho)$．在 $x=0$ 处，y_0 及 y_1 簡化为

$$y_0(0)=1,\ y_1(0)=0,\ y_0'(0)=0,\ y_1'(0)=1,$$

而 y_2 及 y_3 在 $x=\infty$ 处簡化为

$$y_2=(2/x)^{1/2}e^{1/2\pi\rho}[(1+e^{-2\pi\rho})^{1/2}+1]^{1/2}\sin[g(x)][1+O(x^{-1})]$$

$$y_3=(2/x)^{1/2}e^{1/2\pi\rho}[(1+e^{-2\pi\rho})^{1/2}-1]^{1/2}\cos[g(x)][1+O(x^{-1})],$$

式中

$$g(x)=\tfrac{1}{4}x^2-\rho\ln x+\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\gamma'.$$

我們还有

$$y_3(-x)=y_2(x).$$

J. G. P. 密勒曾以 y_2 及 y_3 作为数值表的計算基礎；y_0 及 y_1 曾由 Wells 及 Spence (1945) 及 Darwin (1949) 討論过．

从 (2) 及 6-6(6) 及 6-6(7) 可得

(14) $D_{\nu+1}(z)-zD_\nu(z)+\nu D_{\nu-1}(z)=0,$

又从 6-6(10) 可得

(15) $$\frac{d^m}{dz^m}[e^{\frac{1}{4}z^2}D_\nu(z)]=(-1)^m(-\nu)_m e^{\frac{1}{4}z^2}D_{\nu-m}(z),$$

(16) $$\frac{d^m}{dz^m}[e^{\frac{1}{4}z^2}D_\nu(z)]=(-1)^m e^{-\frac{1}{4}z^2}D_{\nu+m}(z),\ m=1,2,3\cdots$$

因此，从 (15),(16) 及台劳定理可得

(17) $$D_\nu(x+y)=e^{\frac{1}{2}(xy+\frac{1}{2}y^2)}\sum_{m=0}^{\infty}(-y)^m(m!)^{-1}D_{\nu+m}(x)$$
$$=e^{-\frac{1}{2}(xy+\frac{1}{2}y^2)}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\nu}{m}y^mD_{\nu-m}(x),$$

如 $\nu=0$，这一式給出了 $D_n(z)$ 的母函数［郎漢米特多項式的母函数，見 (9) 及第 10 章］.

(18) $$e^{-\frac{1}{4}z^2+zt-\frac{1}{2}t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D_n(z).$$

如 ν 为一負整数，則 $D_\nu(z)$ 可用誤差函数來表示，如下

(19) $$D_{-m-1}(z)=2^{\frac{1}{2}}\frac{(-1)^m}{m!}e^{-\frac{1}{4}z^2}\frac{d^m}{dz^m}[e^{\frac{1}{2}z^2}\operatorname{Erfc}(2^{-\frac{1}{2}}z)],$$

如 $\nu=-\frac{1}{2}$，則可用第三类修正貝塞尔函数表示为

(20) $$D_{-\frac{1}{2}}(z)=(\tfrac{1}{2}z\pi)^{\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{4}}(\tfrac{1}{4}z^2).$$

8-3. 積分表示式及積分式

拋物柱函数的積分表示式

$D_\nu(z)$

(1) $$=\frac{2^{\frac{1}{2}\nu}}{\Gamma(-\frac{1}{2}\nu)}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}tz^2}t^{-1-\frac{1}{2}\nu}(1+t)^{\frac{1}{2}(\nu-1)}dt$$

$\operatorname{Re}\nu<0,\ |\arg z|\leqslant\frac{1}{4}\pi,$

(2) $$=\frac{2^{\frac{1}{2}(\nu-1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)}ze^{-\frac{1}{4}z^2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}tz^2}t^{-\frac{1}{2}(1+\nu)}(1+t)^{\frac{1}{2}\nu}dt$$

$\operatorname{Re}\nu<1,\ |\arg z|\leqslant\frac{1}{4}\pi,$

$$(3)\qquad =\frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}t^{-\nu-1}\,dt,\qquad \mathrm{Re}\,\nu<0,$$

$$(4)\qquad D_\nu(z)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}z^2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2}t^\nu\cos\left(zt-\tfrac{1}{2}\nu\pi\right)dt,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1,$$

$$(5)\qquad D_{-2\nu}[(\alpha/z)^{\frac{1}{2}}]$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\alpha/z}z^\nu 2^{\nu-1}[\Gamma(2\nu)]^{-1}\int_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1}\exp[-(2\alpha t)^{\frac{1}{2}}]dt,$$

$$\mathrm{Re}\,\nu>0.$$

$$(6)\qquad D_\nu(z)=2^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{3}{4}z^2}(2\pi i)^{-1}$$

$$\times\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}-s)\Gamma(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4})}(\tfrac{1}{2}z^2)^s ds,$$

$$|\arg z|<\tfrac{3}{4}\pi,\ \nu\neq\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{3}{2},\cdots$$

$$(7)\qquad D_\nu(z)D_{-\nu-1}(z)=2\int_0^\infty J_{\nu+\frac{1}{2}}(t^2)\cos\left(zt-\tfrac{1}{2}\nu\pi\right)e^{-zt}dt,$$

$$\mathrm{Re}\,z>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1,$$

$$D_\nu(ze^{\frac{1}{4}\pi i})D_\nu(ze^{-\frac{1}{4}\pi i})$$

$$(8)\qquad =\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty J_{-\nu-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}t^2)e^{-zt}dt\qquad \mathrm{Re}\,\nu<0,\ \mathrm{Re}\,z\geqslant 0.$$

$$(9)\qquad =\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty K_{\nu+\frac{1}{2}}(t^2)\cos\left(zt-\tfrac{1}{2}\nu\pi\right)e^{-zt}dt,$$

$$0<-\mathrm{Re}\,\nu<1.$$

$$(10)\qquad =-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(\mathrm{ch}\,t)^\nu(\mathrm{sh}\,t)^{\nu-1}\exp\left(-\tfrac{1}{2}z^2\,\mathrm{sh}\,t\right)dt$$

$$\mathrm{Re}\,\nu>0,\ |\arg z|\leqslant\tfrac{1}{4}\pi.$$

積分表示式 (1), (2), (3), (4), (5) 可以这样來証明，卽証明它們的右边滿足微分方程 8-2(1) 幷設定在 $z=0$ 处的正确初始値．方程 (1) 及 (2) 也可从 6-5(2), 6-5(6) 及 8-2(1) 中導出．在 (6) 式中，積分路徑必須能把被積式分子上 $\Gamma(s)$ 的極与其他两 γ 函数的極分隔开來；这一公式是 6-11(9) 的一个推論．

積分表示式 (7), (8) 及 (9) 曾由梅杰 (1935 b, 1937 a) 加以

証明，(10) 式由巴萊 (1937) 加以証明．J_ν, K_ν 表示 ν 階貝塞尔函数；見 7-2(2) 及 7-2(13)。

对于 D_ν 或两个抛物柱函数的積，另外还有許多積分表示式。D_ν 的表示式見梅杰 (1934, 1935 a, 1938 a)．D_ν 的一个包含其他合流超比函数的積分表示式曾由梅杰(1941)給出．与(7),(8),(9)有关的一些結果，也可参看梅杰的著作(1937 b)．

包含抛物柱函数的積分

(11)
$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{-1+\beta/2} D_{-\nu}[2(kt)^{1/2}]dt$$
$$=\frac{2^{1-\beta-\nu/2}\pi^{1/2}\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2})}(z+k)^{-\beta/2}F\left(\frac{\nu}{2},\frac{\beta}{2};\frac{\nu+\beta+1}{2};\frac{z-k}{z+k}\right)$$
$$\mathrm{Re}\,\beta>0,\ \mathrm{Re}\,z/k>0,$$

(12)
$$\int_0^\infty e^{\frac{1}{4}t^2}D_{-\nu}(t)t^{2c-1}\Phi(a,c;-\tfrac{1}{2}pt^2)dt$$
$$=\frac{\pi^{1/2}}{2^{c+\frac{1}{2}\nu}}\frac{\Gamma(2c)\Gamma(\frac{1}{2}\nu-c+a)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu)\Gamma(a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu)}F(a,c+\tfrac{1}{2};a+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu;$$
$$1-p),\qquad |1-p|<1,\ \ \mathrm{Re}\,c>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>2\mathrm{Re}(c-a),$$

(13)
$$\int_0^\infty e^{\frac{1}{4}t^2}D_{-\nu}(t)t^{2c-2}\Phi(a,c;-\tfrac{1}{2}pt^2)dt$$
$$=\frac{\pi^{1/2}}{2^{c+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma(2c-1)\Gamma(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}-c+a)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu)\Gamma(a+\frac{1}{2}\nu)}$$
$$\times F(a,c-\tfrac{1}{2};a+\tfrac{1}{2}\nu;1-p),$$
$$|1-p|<1,\mathrm{Re}\,c>\tfrac{1}{2},\ \mathrm{Re}\,\nu>2\mathrm{Re}\,(c-a)-1.$$

(14)
$$\int_0^\infty t^\nu e^{-\frac{1}{4}t^2}D_{2\nu}(t)J_{\nu-1}(tz)dt$$
$$=2^\nu\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\pi^{-\frac{1}{2}}z^{\nu-1}e^{-\frac{1}{4}z^2}\Phi(-\nu.\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}z^2),\quad \mathrm{Re}\,\nu>-\tfrac{1}{2},$$

(15)
$$(2\pi\mu)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-(x-y)^2/(2\mu)}e^{\frac{1}{4}y^2}D_\nu(y)dy$$
$$=(1-\mu)^{\frac{1}{2}\nu}e^{x^2/(4-4\mu)}D_\nu[x(1-\mu)^{-\frac{1}{2}}],\qquad 0<\mathrm{Re}\,\mu<1,$$

(16) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-(1+\lambda)y^2/4} D_\nu[y(1-\lambda)^{1/2}]dy$

$= (2\pi)^{1/2}\lambda^{1/2\nu} e^{-(1+\lambda)x^2/(4\lambda)} D_\nu[i(\lambda^{-1}-1)^{1/2}x],\qquad \mathrm{Re}\,\lambda>0,$

(17) $\int_{0}^{\infty} (xy)^{1/2} J_\nu(xy) y^{\nu-1/2} e^{1/4 y^2} D_{-2\nu}(y)\,dy$

$= x^{\nu-1/2} e^{1/4 x^2} D_{-2\nu}(x) \qquad \mathrm{Re}\,\nu>-1/2,$

(18) $\int_{0}^{\infty} D_\nu(y) e^{-1/4 y^2} y^\nu (x^2+y^2)^{-1} dy$

$= (1/2\pi)^{1/2} \Gamma(\nu+1) x^{\nu-1} e^{1/4 x^2} D_{-\nu-1}(x), \qquad \mathrm{Re}\,\nu>-1,$

(19) $\int_{0}^{\infty} e^{-3t^2/4} t^{\nu-1} D_\nu(t)\,dt = 2^{-1/2\nu}\Gamma(\nu)\cos(1/4\nu\pi), \qquad \mathrm{Re}\,\nu>0.$

(20) $\int_{0}^{\infty} e^{-1/4 t^2} t^{\mu-1} D_{-\nu}(t)\,dt$

$= \dfrac{\pi^{1/2} 2^{-1/2\mu-1/2\nu}\Gamma(\mu)}{\Gamma(1/2\mu+1/2\nu+1/2)}, \qquad \mathrm{Re}\,\mu>0,$

(21) $\int_{0}^{\infty} D_\mu(\pm t) D_\nu(t)\,dt = \dfrac{\pi 2^{1/2\mu+1/2\nu+1/2}}{\mu-\nu}$

$\times\left[\dfrac{1}{\Gamma(1/2-1/2\mu)\Gamma(-1/2\nu)} \mp \dfrac{1}{\Gamma(-1/2\mu)\Gamma(1/2-1/2\nu)}\right]$

如取下面的符号，則 $\mathrm{Re}\,\mu>\mathrm{Re}\,\nu$.

(22) $\int_{0}^{\infty} [D_\nu(t)]^2 dt = \pi^{1/2} 2^{-3/2} \dfrac{\psi(1/2-1/2\nu)-\psi(-1/2\nu)}{\Gamma(-\nu)}$

(23) $\int_{0}^{\infty} [D_n(t)]^2 dt = (2\pi)^{1/2} n!, \qquad n=0,1,2,\cdots$

在这些公式中，F, Φ, J, Ψ 分別代表超比級数，合流超比級数，第一类貝塞尔函数及 γ 函数的对数導数.

方程 (11) 从 6–11(12) 及拉普拉斯变换的反演公式中推出. 根据 2–1(26), 2–1(2), 可知 (11) 式右边部分在 $\beta=\nu+1$ 或在 $\nu=-2n$, $n=0,1,2,\cdots$ 时簡化为一初等函数. (12) 及 (13) 式的証明見 Erdélyi (1936). 这类包含 ${}_pF_q$ (見 4–1 節) 以代替 Φ 的更

一般公式曾由 Mitra(1946)給出．(14)式的証明見 Meijer(1938)．要証明 (15)，可將 D_ν 用 (3) 式表示，調換積分次序卽得；如 μ 趋向 1，則 (15) 式右側部分趋向于 x^ν. 公式 (16) 基本上与 (15) 相同，公式 (17) 及 (18) 是 R. S. Varma (1936, 1937) 提出；公式(19) 由 Watson (1910) 証明，公式 (20) 及 (21) 則是 Erdélyi (1938) 所提出；如 $\nu=\mu$，則从 (21) 式可得 (22) 及 (23) 式．从公式 (21) 我們还可以看出，$D_n(t)$，$n=0, 1, 2, \cdots$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上組成一正交系．

8-4. 漸近展开式

从 8-3(6) 式可以証明(見 Whittaker-Watson, 1927) 对于 $|z|$ 大的值及 ν 的一个固定值，有

$$(1)\qquad D_\nu(z)=z^\nu e^{-\frac14 z^2}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{(-\frac12\nu)_n(\frac12-\frac12\nu)_n}{n!\,(-\frac12 z^2)^n}+O|z^2|^{-N-1}\right]$$

$$-\tfrac34\pi<\arg z<\tfrac34\pi.$$

$$(2)\qquad D_\nu(z)=z^\nu e^{-\frac14 z^2}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{(-\frac12\nu)_n(\frac12-\frac12\nu)_n}{n!\,(-\frac12 z^2)^n}+O|z^2|^{-N-1}\right.$$
$$\left.-\frac{(2\pi)^{\frac12}}{\Gamma(-\nu)}e^{\nu\pi i}z^{-\nu-1}e^{\frac14 z^2}\sum_{n=0}^{N}\frac{(\frac12\nu)_n(\frac12+\frac12\nu)_n}{n!\,(\frac12 z^2)^n}+O|z^2|^{-N-1}\right]$$

$$\pi/4<\arg z<5\pi/4.$$

$$(3)\qquad D_\nu(z)=z^\nu e^{-\frac14 z^2}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{(-\frac12\nu)_n(\frac12-\frac12\nu)_n}{n!\,(-\frac12 z^2)^n}+O|z^2|^{-N-1}\right.$$
$$\left.-\frac{(2\pi)^{\frac12}}{\Gamma(-\nu)}e^{-\nu\pi i}z^{-\nu-1}e^{\frac14 z^2}\sum_{n=0}^{N}\frac{(\frac12\nu)_n(\frac12+\frac12\nu)_n}{n!\,(\frac12 z^2)^n}+O|z^2|^{-N-1}\right]$$

$$-5\pi/4<\arg z<-\pi/4.$$

这里我們应用記法

$$(4)\qquad (a)_0=1,\ (a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1),\qquad n=1, 2, 3, \cdots$$

对于 $|\nu|\to\infty$ 及对于满足条件 $|z|<|\nu|^{\frac12}$ 的任意值的 z，$D_\nu(z)$ 的性态曾由 Schwid (1935) 加以詳細討論．他的結果是以

倫乔方法（1932）为基礎．作为一个特殊的情形，我們有下面的一个結論，这里所提的形式是由齐雷（1949）提出的：

如 $|z|$ 有界及 $|\arg(-\nu)|\leqslant\frac{1}{2}\pi$，則对于 $|\nu|\to\infty$，

$$D_\nu(z)=2^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\tfrac{1}{2}\nu\ln(-\nu)-\tfrac{1}{2}\nu-(-\nu)^{\frac{1}{2}}z\right]\left[1+O|\nu|^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{5}$$

8-5．用 $D_\nu(x)$ 表示的函数表示式．

8-5-1．級数

从 6-12(3) 式我們得到一个 x 为正实数时的特殊情形：

$$D_\nu(x)=\frac{2^{\frac{1}{2}\nu}}{\Gamma(-\frac{1}{2}\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nD_{2n}(x)}{n!\,2^n(n-\frac{1}{2}\nu)} \tag{1}$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nD_{2n+1}(x)}{n!\,2^n(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)}.$$

这一公式可以看作是 ν 的函数 $D_\nu(x)$ 的一个插值公式，插值点就是非負的偶整数或奇整数．用 $D_n(2^{\frac{1}{2}}x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 來表示的 $D_\nu(x)D_\mu(x)$ 的一个展开式曾由 Dhar(1935) 提出．森坎(1939) 曾証明了下面的加法定理：

$$D_\nu(x\cos t+y\sin t)=\exp\left[\tfrac{1}{4}(x\sin t-y\cos t)^2\right]\times\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu}{n}(\tan t)^nD_{\nu-n}(x)D_n(y)(\cos t)^\nu \tag{2}$$

上式对 t, x, y 的实数值及 $0\leqslant t<\pi/4$，$\mathrm{Re}\,\nu\geqslant 0$ 正确．

Erdélyi (1936) 証明了下面的展开式［見 8-4(4)］

$$W_{\kappa,\mu}(\tfrac{1}{2}z^2)=2^{-\kappa}z^{\frac{1}{2}}\times\left[\sum_{l=0}^{p-1}\frac{(-1)^l(\frac{1}{2}-2\mu)_l(\frac{1}{2}+2\mu)_l}{(2z)^l}D_{2\kappa-\frac{1}{2}-l}(z)+\mathrm{R}_p\right] \tag{3}$$

式中 R_p 代表余項．如 μ 为半値奇整数，則級数有尽．在所有其他情形下，这个級数一般是發散的，但余項可以計値，特别是，如 $|\arg z|<\frac{1}{4}\pi$ 且 p 很大，則表出了展开式的漸近性質．

从展开式 6-12(6) 可得出一个以貝塞尔函数來表示的 $D_\nu(z)$ 的展开式，这里的貝塞尔函数由于它的階为半値奇整数，故变为初

等函数．特別是，我們有

$$D_\nu(z)=\frac{\pi^{1/2}2^{1/2\nu}}{\Gamma(3/4-\kappa)}\{\cos\zeta-2^{-6}\kappa^{-2}\zeta[(1-2\zeta^2/3)\sin\zeta$$
$$-\zeta\cos\zeta]+\cdots\}-\frac{\pi^{1/2}2^{1/2\nu}}{\kappa^{1/2}\Gamma(1/4-\kappa)}\{\sin\zeta-2^{-6}\kappa^{-2}$$
$$\times[(1-\zeta^2)\sin\zeta-\zeta(1-2\zeta^2/3)\cos\zeta]+\cdots\}.$$

式中

$$\kappa=1/2\nu+1/4>0,\quad \zeta=(2\kappa)^{1/2}z,$$

且以…表示的項是 κ^{-3} 次的，只要 ζ 有界．

与 8-2(12) 联系的斯透姆-刘維尔問題引出了有限区間 $(0, x_0)$ 上的某一正交函数系．其中主要是抛物柱函数，其階数形为 $i\rho-1/2$ (ρ 实数)，而且它的变量具有一幅角 $1/4\pi$ 或 $-3/4\pi$ (見 8-2 節)．它們的应用可参看 Magnus (1941)；一般的斯透姆-刘維尔問題見 Ince 著作 (1944) 的第 10 章．

8-5-2. 关于参数的積分表示式

齐雷定理 (1949)．如果 $f(x)$ 在实变数 x 的任一有限区間内有有界变差，而且在 $(-\infty,\infty)$ 上为絶对可積，則

$$(4)\qquad -4\pi i f(x)=\int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty}\frac{e^{1/2(\nu+1/2)\pi i}}{\sin\nu\pi}d\nu\int_{-\infty}^{\infty}[D_\nu(hx)D_{-\nu-1}(\bar{h}t)$$
$$+D_\nu(-hx)D_{-\nu-1}(-\bar{h}t)]f(t)dt$$

式中

$$(5)\qquad h=e^{1/4i\pi},\ \bar{h}=e^{-1/4i\pi}.$$

f 为絶对可積的条件，在 $x\to\pm\infty$ 时可用下式來代替，即

$$(6)\qquad f(x)=e^{-1/4ix^2}\left(\frac{c_1}{x^\alpha}+\frac{c_2}{x^{\alpha+1}}\right)[1+O(|x|^{-1})]$$

这里 α 为实数且 $>1/2$, c_1, c_2 为常数(它們在 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 下可以不同)。条件 (6) 在有些边值問題中是需要的(見 Magnus.

1940). 方程 (4) 与富里哀積分的反演定理相仿. 如果 $f(x)$ 是 x 的偶函数或奇函数,那么方程 (4) 可以得到簡化.

齐雷 (1949) 曾將 (4) 应用于函数

$$f(x)=D_\mu(hx), \quad x>0,$$
$$f(x)=0 \qquad x<0.$$

在形式意义上[虽然 (4) 及 (6) 并不能得到满足], 爱尔台里將平面波用抛物柱坐标表示的公式是齐雷定理的一个特殊情形,即

$$(7) \qquad -2i(2\pi)^{1/2}\exp\left[-\tfrac14 i(\xi^2-\eta^2)\cos\phi-\tfrac12 i\xi\eta\sin\phi\right]$$
$$=\int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty}\frac{d\nu}{\sin\nu\pi}\left[\frac{(\tan\frac12\phi)^\nu}{\cos\frac12\phi}D_\nu(-h\xi)D_{-\nu-1}(h\eta)\right.$$
$$\left.+\frac{(\operatorname{ctn}\frac12\phi)^\nu}{\sin\frac12\phi}D_{-\nu-1}(h\xi)D_\nu(-h\eta)\right]$$

(見 Erdèlyi, 1941). 此处 h 見 (5) 式, (7) 对 ξ,η 的一切实数值都成立. 对于投射于一半平面上的平面波的衍射問題, 齐雷 (1949) 給出了下面的次波 ("Sommerfeld 波") 公式

$$(8) \qquad -2i\,D_0[h(\zeta\cos\tfrac12\phi+\eta\sin\tfrac12\phi)]\,D_{-1}[h(\eta\cos\tfrac12\phi$$
$$-\zeta\sin\tfrac12\phi)]=\int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty}\frac{d\nu}{\sin\nu\pi}\;\frac{(\tan\frac12\phi)^\nu}{\cos\frac12\phi}$$
$$\times D_\nu(-h\zeta)D_{-\nu-1}(h\eta).$$

6-15 (15) 的一个特殊情形就是用 8-2 (1) 的解表示的"柱面波"的表达式,即

$$(9) \qquad 2^{1/2}\pi^2 H_0^{(2)}[\tfrac12 k(\xi^2+\eta^2)]$$
$$=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}D_\nu[k^{1/2}(1+i)\xi]D_{-\nu-1}[k^{1/2}(1+i)\eta]\Gamma(-\tfrac12\nu)$$
$$\times\Gamma(\tfrac12+\tfrac12\nu)\,d\nu$$

式中, $-1<c<0$, ξ,η 为实数, $\operatorname{Re} ik\geqslant 0$. 另一个將 (9) 的左边表示为抛物柱函数的参数的積分的表达式可从齐雷定理導出;見 Magnus (1941).

爱尔台里还証明了下面的公式:

$$(10)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_\nu(z)t^\nu \Gamma(-\nu)\,d\nu = e^{-\frac{1}{4}z^2-zt-\frac{1}{2}t^2}$$

$$c<0,\ |\arg t|<\pi/4,$$

$$(11)\quad \frac{(\frac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}[D_\nu(x)D_{-\nu-1}(iy)+D_\nu(-x)D_{-\nu-1}(-iy)]$$

$$\times\frac{t^{-\nu-1}\,d\nu}{\sin(-\nu\pi)} = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{1}{4}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}(x^2+y^2)\right.$$

$$\left.+i\,\frac{txy}{1+t^2}\right]\qquad -1<c<0,\ |\arg t|<\tfrac{1}{2}\pi,$$

这些公式可作为 D_ν 的綫性和双綫性連續母函数[見 6-2(20)].

8-6. 零点及摹繪性質

对于任意固定值的 ν, 公式 8-4 (1) 至 8-4 (3) 給出了 $|z|$ 大数值下的 $D_\nu(z)$ 的一个摹狀;如果 ν 及 z 都是实数,那么不論 8-4(2) 及 8-4(3) 外观如何, $D_\nu(z)$ 必也是实数. 如 ν 为实数,則 $D_\nu(z)$ 具有 $[\nu+1]$ 个实零点,此处 $[\nu+1]$ 代表小于 $\nu+1$ 的最大正整数,如这样的正整数不存在,那么它等于零. 这一結果可从微分方程 8-2(1) 的討論中得出. 如 $\nu=n=0, 1, 2, \cdots$, 則 $D_n(z)$ 肯定具有 n 个实零点(不再有其他零点). 关于 8-2(1) 的解(在实軸上为实数)的实零点的其他結果,見 Auluck (1941); $D_\nu(x)$ 在 ν 为实数时的实零点的漸近公式,見 Tricomi (1947).

迴轉拋物面函数

下面二節中的一些結果,僅包含了迴轉拋物面上 $\Delta u+k^2u=0$ 的边值問題中所產生的公式的一小部分. 整个这一問題曾由布契霍兹加以徹底研究; 在 8-7 及 8-8 節中的公式指出了那一种形式的結果可以在那一种参考資料中找到.

8-7. 特殊合流超比方程的解

在 8-1(8) 中如 k, μ, λ 都是任意复常数，則得一与合流超比方程等价的微分方程. 不过，如 k 及 λ 为实数而 2μ 为整数，8-1(8) 可簡化为

(1) $$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\xi^{-1}\frac{du}{d\xi}+(4\xi^2-p^2\xi^{-2}-4\tau)u=0,$$

其中

(2) $p=0, 1, 2, \cdots$ 而 τ, ξ 都是实数.

方程(1)具有解为

(3) $$\xi^{-1}M_{\pm i\tau, \frac{1}{2}p}(\pm i\xi^2),\ \xi^{-1}W_{\pm i\tau, \frac{1}{2}p}(\pm i\xi^2)$$

(記法見 6-9 節). 它們由下列关系相联系:

(4) $$e^{-\frac{1}{4}i\pi(p+1)}M_{i\tau, \frac{1}{2}p}(i\xi)=e^{\frac{1}{4}i\pi(p+1)}M_{-i\tau, \frac{1}{2}p}(-i\xi)$$

(5) $$=\frac{p!\exp[\pi\tau-\frac{1}{4}i\pi(p+1)]}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p-i\tau)}W_{-i\tau, \frac{1}{2}p}(-i\xi)$$
$$+\frac{p!\exp[\pi\tau+\frac{1}{4}i\pi(p+1)]}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p+i\tau)}W_{i\tau, \frac{1}{2}p}(i\xi)$$

其中 ξ 代表一正的实变数，且 $\arg\pm i\xi=\pm\frac{1}{2}\pi$. 对于 $\xi\to\infty$ 及固定的 τ, p, 則有

(6) $$W_{i\tau, \frac{1}{2}p}(i\xi)=\xi^{i\tau}e^{-\frac{1}{2}i\xi-\frac{1}{2}\pi\tau}[1+O(\xi^{-1})]$$

(7) $$W_{-i\tau, \frac{1}{2}p}(-i\xi)=\xi^{-i\tau}e^{\frac{1}{2}i\xi-\frac{1}{2}\pi\tau}[1+O(\xi^{-1})].$$

(3) 式中的 M 函数的对应表达式可从 (4), (5), (6), 及 (7) 式中導出.

函数

(8) $$e^{-\frac{1}{4}i\pi(p+1)}M_{i\tau, \frac{1}{2}p}(i\xi)=e^{\frac{1}{4}i\pi(p+1)}M_{-i\tau, \frac{1}{2}p}(-i\xi)$$

在 ξ 取正的实数值(如 τ, p 为实数)时为实数.

如 p 及 ξ 固定而 τ 很大，則 6-13(8) 給出了下面的漸近表示式:

(9)　$W_{\pm i\tau, \frac{1}{2}p}(\pm i\xi) = 2^{\frac{1}{2}} e^{\mp \frac{1}{4} i\pi} e^{\mp i\tau} \tau^{\pm i\tau} (\xi\tau)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\pi\tau}$

$\times \operatorname{ch} [(\tau - 2(\tau\xi)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} i\pi] [1 + O(\tau^{-\frac{1}{2}})]$,

(10)　$W_{\mp i\tau, \frac{1}{2}p}(\pm i\xi) = 2^{\frac{1}{2}} e^{\pm i\tau} \tau^{\mp i\tau} (\xi\tau)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\pi\tau}$

$\times \cos [\mp i\tau - 2(\tau\xi)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\pi] [1 + O(\tau^{-\frac{1}{2}})]$,

其中 τ, ξ 都是正的实数.

爱尔台里 (1937) 研究了 $|\tau|$ 及 $|\xi|$ 都很大,但 τ/ξ 是一固定的負数的情形. 結果是

(11)　$M_{-i\tau, \mu}[i\tau(2 \operatorname{sh} \beta)^2] = \Gamma(2\mu+1) e^{\frac{1}{2} i\pi(\mu+\frac{1}{2})} \tau^{-\mu} \left(\frac{2 \tanh \beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\times \sin [\tau(\operatorname{sh} 2\beta + 2\beta) - (\mu - \frac{1}{4})\pi] [1 + O(\tau^{-\frac{1}{2}})]$

其中 $\tau, \beta, \mu + \frac{1}{2}$ 都是正实数.

对于某些边値問題的解,需用到下面几个函数. 設 ξ_0 为一固定的正实数,則存在有一个实数序列 τ_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 滿足条件

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \cdots \quad 且\ M_{i\tau_n, \frac{1}{2}p}(i\zeta_0) = 0.$$

函数

(12)　$\left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} M_{i\tau_n, \frac{1}{2}p}(i\zeta)$

在 $(0, \zeta_0)$ 上正交. 为了計算給定 ζ_0 下的 τ_n, 幷为了求得函数 (12) 的正規因子,布契霍兹 (1943) 給出了下面的公式:

(13)　$(i\zeta)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p} M_{i\tau, \frac{1}{2}p}(i\zeta)$

$$= \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}p)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p)}{\Gamma(l+1+\frac{1}{2}p)} \frac{(\frac{1}{4}\zeta)^{l+\frac{1}{2}}}{l!}$$

$$\times \prod_{r=0}^{l} \left[1 + \frac{\tau^2}{(r+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p)^2}\right]$$

$$\times \left[J_{l-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}|\zeta|) + \frac{\tau \operatorname{sgn} \zeta}{l+\frac{1}{2}+p} J_{l+\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}|\zeta|)\right]$$

其中 τ, ζ 都是实数, $\tau > 0$, $\zeta \neq 0$. 还有函数 (13) 的偏導数

$$\frac{\partial}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial\zeta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\zeta}$$

的类似公式.

8-8. 包含迴轉拋物面函数的積分和級数

作为 6-15(15) 的一个推論，我們有

$$(1)\qquad \frac{e^{i(x+y)}}{x+y}=\frac{-i}{2(xy)^{1/2}}\int_{-i\infty}^{i\infty}W_{-s,0}(-2ix)W_{s,0}(-2iy)\frac{ds}{\cos\pi s}$$

这是一个中心在拋物面焦点上的球面波用迴轉拋物面函数來表示的表达式. 公式 (1) 最先由米克斯奈 (1933) 所証明，他还導出了下面的公式：

$$(2)\qquad \frac{2\pi p!\,p!}{(2p+1)!}\Gamma(p+1+2i\alpha)\Gamma(p+1-2i\alpha)$$
$$\times\frac{(xy)^{1/2(p+1)}}{(x+y)^{p+1}}M_{-2i\alpha,1/2p}(x+y)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma[1/2p+1/2+i(\alpha+\tau)]\,\Gamma[1/2p+1/2+i(\alpha-\tau)]$$
$$\times\Gamma[1/2p+1/2-i(\alpha+\tau)]\,\Gamma[1/2p+1/2-i(\alpha-\tau)]$$
$$\times M_{i\alpha+i\tau,1/2p}(x)M_{i\alpha+1/2i\tau,1/2p}(y)\,d\tau,$$
$$\operatorname{Re}x\geqslant0,\ \operatorname{Re}y\geqslant0,\ p=0,1,2,\cdots$$

奇点在迴轉拋物面焦点上而形式更复什的波的積分表示式，曾由布契霍兹 (1947) 提出. 他的結果之一是

$$(3)\qquad (xy)^{1/2}i^n\left[\frac{\pi}{2(x+y)}\right]^{1/2}H^{(1)}_{n+1/2}(x+y)\,P_n^p\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$
$$=\frac{(-1)^{p-1}}{2\pi}\,\frac{(n+p)!}{p!\,p!\,(n-p)!}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s+1/2p+1/2)$$
$$\times\Gamma(-s+1/2p+1/2)\,{}_3F_2W_{-s,1/2p}(-2ix)W_{-s,1/2p}(-2iy)\,ds$$

其中

$$x>y\geqslant0,\quad \sigma<1/2+1/2p,$$

$${}_3F_2={}_3F_2(-n+p,n+p+1,-s+1/2+1/2p;p+1,p+1;1),$$

[廣义超比級数的定义見 4-1(1)].

如 $n=p$，則 (3) 变为与6-15(15)等价. 应当注意，$H^{(1)}_{n+1/2}$ 是

一个初等函数，見 7-2(6).

中心在任意一点的球面波用迴轉抛物面函数來表示的表达式也曾由布契霍茲 (1947) 給出．如果

$$R=\{[(x_1-y_1)-(x_0-y)_0]^2+4x_0y_0+4x_1y_1 \\ -8(x_0y_0x_1y_1)^{1/2}\cos(\phi_1-\phi_2)\}^{1/2}$$

且如 x_0, y_0, x_1, y_1 都是正实数而 $x_0>x_1, y_0>y_1$，則，对于实数 $\sigma<1/2$，有

(4) $$(x_0y_0x_1y_1)^{1/2}\frac{e^{iR}}{iR}=-2\sum_{p=0}^{\infty}(2-\delta_{0,p})\frac{\cos p(\phi_0-\phi_1)}{p!\,p!} \\ \times(2\pi i)^{-1}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s+1/2+1/2p)\Gamma(-s+1/2+1/2p) \\ \times[M_{-s,1/2p}(-2ix_1)M_{s,1/2p}(-2iy_1)W_{-s,1/2p}(-2ix_0) \\ \times W_{s,1/2p}(-2iy_0)]ds$$

其中 $\delta_{0,0}=1$, $\delta_{0,p}=0$ 如 $p>0$.

对于平面波，布契霍茲 (1947) 給出了一个級数及積分表示式的混合公式

(5) $$\exp[i(x-y)\cos\theta+2(xy)^{1/2}\sin\theta\cos\phi] \\ =\frac{1}{(xy)^{1/2}\sin\theta}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2-\delta_{0,p}}{p!\,p!}i^p\cos(p\phi) \\ \times(2\pi i)^{-1}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s+1/2+1/2p)\Gamma(-s+1/2+1/2p) \\ \times(\tan 1/2\,\theta)^{2s}M_{s,1/2p}(-2ix)M_{s,1/2p}(-2iy)ds.$$

对于本節中的積分表示式，有一些对应的級数展开式．在最簡單情形下，对应于 (1) 式的公式为

(6) $$\frac{e^{i(x+y)}}{x+y}=\frac{1}{(xy)^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nW_{-n-1/2,0}(-2ix) \\ \times W_{-n-1/2,0}(-2iy).$$

其他很多的級数及積分式見 Buchholz (1943, 1947, 1948, 1949).

参 考 文 献

Appell, Paul, and M. J. Kampé de Fériet, 1926: *Fonctions hypérgeométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite.* Gauthier-Villars.

Auluck, F. C., 1941: *Proc. Nat. Inst. Sci., India* 7, 133-140.

Bailey, W. N., 1937: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 8, 51-53.

Buchholz, Herbert, 1943: *Z. Angew. Math. Mech.* 23, 47-58, 101-118.

Buchholz, Herbert, 1947: *Z. Physik,* 124, 196-218.

Buchholz, Herbert, 1648: *Ann. Physik* (6) 2, 185-210.

Buchholz, Herbert, 1949: *Math. Z.*, 52, 355-383.

Cherry, T. M., 1949: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), 8, 50-65.

Darwin, C. G., 1949: *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 2, 311-320.

Dhar, S. C., 1935: *J. Indian Math. Soc.* (*N.S.*) 1, 105-108.

Erdélyi, Arthur, 1936: *Math. Ann.* 113, 347-356.

Erdélyi, Arthur, 1937: *Akad. Wiss. Wién. S. -B. IIa* 146, 589-604.

Erdélyi, Arthur, 1938: *J. Indian Math. Soc.* (*N. S.*) 3, 169-181.

Erdélyi, Arthur, 1941: *Proc. Royal Soc. Edinburgh.* 61, 61-70.

Humbert, Pierre, 1920 a: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 170, 564.

Humbert, Pierre, 1920 b: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 170, 832.

Humbert, Pierre, 1920 c: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 170, 1482.

Humbert, Pierre, 1920 d: *C. R. Acad. Sci. Paris,* 171, 428.

Ince, E. L., 1944: *Ordinary differential equations.* Longmans.

Langer, R. E., 1932: *Trans. Amer. Math. Soc.* 34, 447-480.

Magnus, Wilhelm, 1940: *Jber. Deutsch. Math. Verein,* 50, 140-161.

Magnus, Wilhelm, 1941: *Z. Physik,* 118, 343-356.

Meijer, C. S., 1934: *N. Archiv. V. Wiskunde* (2), 18, 35-57.

Meijer, C. S., 1935 a: *Proc. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* 38, 528-535.

Meijer, C. S., 1935 b: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 6, 241-248.

Meijer, C. S., 1937 a: *Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam,* 40, 259-262.

Meijer, C. S., 1937 b: *Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* 40, 871-879.

Meijer, C. S., 1938: *Kon. Akad. Nederland. Wetensch.* 41, 744-755.

Meijer, C. S., 1938 a: *Proc. Kon. Nederland Akad. Wetensch. Amsterdam* 41, 42-44.

Meijer, C. S., 1941: *Proc. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* 44, 590-598.

Meixner, Joseph, 1933: *Math. Z.* 36, 677-707.

Mitra, S. C., 1927: *Proc. Benares Math. Soc.* 9, 21-23,

Mitra, S.C., 1946: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 7, (2), 171-173.

Schwid, N., 1935: *Trans. Amer. Math. Soc.* 37, 339-362.

Shanker, Hari, 1939: *J. Indian Math. Soc.* (*N. S.*) 3, 226-230.

Taylor, W. C., 1939: *J. Math. Physics,* 18, 34-49.

Tricomi, Francesco, 1947: *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 26, 283-300.

Varma. R. S., 1927: *Proc. Benares Math. Soc.* 9, 31-42.

Varma R. S., 1936: *Proc. London Math. Soc.* (2), 42, 9-17.

Varma, R. S., 1937: *J. Indian Math. Soc.* (*N. S.*) 2, 269-275.

Watson, G. N., 1910: *Proc. London Math. Soc.* 8, 393-421.

Wells, C. P., and R. D. Spence, 1945: *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.* 24, 51-64.

Whittaker, E. T., and G. N. Watson, 1927: *A course of modern analysis,* Cambridge.

第九章　不完全 γ 函数及有关函数

9-1. 引言

在应用数学中，有很多函数可以用下面的不完全 γ 函数來表示，

$$(1)\qquad \gamma(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,dt,\qquad \operatorname{Re}\alpha>0,$$

$$(2)\qquad \Gamma(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt=\Gamma(\alpha)-\gamma(\alpha,x),$$

而它們本身，又与合流超比函数 $\Phi(a,c;x)$ 及 $\Psi(a,c;x)$ 在 $a=1$ 的特殊情形密切相关．从 6-5(1)，6-5(2) 及 6-5(6)，有

$$(3)\qquad \gamma(\alpha,x)=\alpha^{-1}x^\alpha e^{-x}\Phi(1,1+\alpha;x)=\alpha^{-1}x^\alpha\Phi(\alpha,1+\alpha;-x),$$

$$(4)\qquad \Gamma(\alpha,x)=x^\alpha e^{-x}\Psi(1,1+\alpha;x)=e^{-x}\Psi(1-\alpha,1-\alpha;x).$$

当 $a=1$ 时，合流超比方程 6-1(2) 具有初等解

$$e^x\,x^{1-c}$$

因此，在本章中我們所討論的特殊合流超比函数，滿足簡單的一階微法方程．

有許多地方以采用下面稍經修正的函数作为基本函数較为方便，

$$(5)\qquad \gamma^*(\alpha,x)=\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,dt,$$

$$=\frac{e^{-x}}{\Gamma(1+\alpha)}\Phi(1,1+\alpha;x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\Phi(\alpha,1+\alpha;-x)$$

因为它同时是 α 及 x 的單值整函数，而且在 α 及 x 的实值下是实数．

下面一些函数都可以用不完全 γ 函数來表示，它們是：指数及对数積分，正弦及余弦積分，誤差函数及弗列司納耳積分与它們的

推廣. 这些函数的定义和記法相当多, 我們这里所用的記法將在討論这些函数的專節中說明.

不完全 γ 函数

9-2. 定义和基本性質

不完全 γ 函数首先由勒上特就实的 x 加以研究 (1811, 第一卷, p. 339-343 及以后的著作). 普萊姆 (1877) 發現了下面的分解式

(1) $\Gamma(\alpha)=\gamma(\alpha, x)+\Gamma(\alpha, x)$,

他应被認为是这些函数 (他以 P 及 Q 代表) 的函数性态的首先研究者.

这些函数有几种記法. 目前,最常用的記法中,除了我們这里所用的一种以外,是天文物理学及核子物理学中所用的記法,那就是

$$E_n(x)=\int_1^\infty e^{-xu}\,u^{-n}\,du=x^{n-1}\,\Gamma(1-n, x).$$

有时也用另一种記法 $K_n(x)$. 对于这种記法中的公式可參看 Placzek (1946), Le Caine (1948) 及 Busbridge (1950).

关于不完全 γ 函数的最早理論及参考文献見 Nielsen (1906 a, 主要在第 15 章及 1906 b). 比較新的理論見 Böhmer (1939).

習慣上, 常用第二类不完全欧拉積分 9-1 (1) 及 9-1 (2) 來定义不完全 γ 函数. 不过, 为了避免 9-1(1) 在 $\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0$ 时所發生的收斂性上的困难起見,我們采用 9-1 (3) 及 9-1 (4) 作为不完全 γ 函数的定义, 而 x^α 及 Ψ 則用第 6 章的約定唯一地定义. 不管記法怎样,公式 9-1 (2) 公認为是勒上特所提出. $\gamma^*(\alpha, x)$ 同时是 α 及 x 的整函数,但 $\gamma(\alpha, x)$ 在 $\alpha=0, -1, -2, \cdots$ 时本身不再有定义. 函数 $\Gamma(\alpha, x)$ 是 α 的整函数,但一般說來,除了 α 为整数的

情形以外，它是 x 的一个多值函数，在 $x=0$ 处具有一枝点.

遞推关系

(2) $\gamma(\alpha+1, x)=\alpha\gamma(\alpha, x)-x^{\alpha}e^{-x}$

(3) $\Gamma(\alpha+1, x)=\alpha\Gamma(\alpha, x)+x^{\alpha}e^{-x}$,

是定义的簡單推論，可以从第二类不完全欧拉積分經分部積分后導出. 它可作为所論函数的另一个定义.

下面是以 x 升冪表示的收斂展开式：

(4) $$\gamma(\alpha, x)=e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha)_{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n x^{\alpha+n}}{n!(\alpha+n)},$$

(5) $$\Gamma(\alpha, x)=\Gamma(\alpha)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\frac{x^{\alpha+n}}{\alpha+n},$$

这二式对于所有的 x 及 $\alpha\neq 0, -1, -2\cdots$ 都正确，且

$$(\alpha)_0=1,\ (\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

$$n=1, 2, \cdots$$

又以 x 降冪表示的漸近展开式为：

(6) $$\Gamma(\alpha, x)=x^{\alpha-1}e^{-x}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(1-\alpha)_m}{(-x)^m}+O(|x|^{-M})\right]$$

$$|x|\to\infty,\ -3\pi/2<\arg x<3\pi/2,\ M=1,2,\cdots$$

(7) $$\gamma(\alpha, x)=\Gamma(\alpha)-x^{\alpha-1}e^{-x}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(1-\alpha)_m}{(-x)^m}+O(|x|^{-M})\right].$$

或者从冪級数展开式，或者从定义，都可導出下面的微分公式

(8) $$\frac{d\gamma(\alpha, x)}{dx}=-\frac{d\Gamma(\alpha, x)}{dx}=x^{\alpha-1}e^{-x},$$

(9) $$\frac{d^n}{dx^n}[x^{-\alpha}\gamma(\alpha, x)]=(-)^n x^{-\alpha-n}\gamma(\alpha+n, x),$$

(10) $$\frac{d^n}{dx^n}[e^{x}\gamma(\alpha, x)]=(-)^n(1-\alpha)_n e^{x}\gamma(a-n, x),$$

(11) $$\frac{d^n}{dx^n}[x^{-\alpha}\Gamma(\alpha, x)]=(-)^n x^{-\alpha-n}\Gamma(\alpha+n, x),$$

(12)　$$\frac{d^n}{dx^n}[e^x \Gamma(\alpha, x)] = (-)^n (1-\alpha)_n e^x \Gamma(\alpha-n, x),$$

对于后面的四个公式，$n=0, 1, 2, \cdots$

下面是勒上特所導出的連分式展开式

(13)　$$\Gamma(\alpha, x) = \cfrac{e^{-x} x^{\alpha}}{x + \cfrac{1-\alpha}{1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{2-\alpha}{1+\cdots}}}}$$

它可从 (3) 式推出。另外的連分式曾由許洛米耳 (1871) 及頓納萊 (1882) 得出.

只要 α 是一正整数，合流超比函数 $\Phi(a, c; x)$ 及 $\Psi(a, c; x)$ 可以用不完全 γ 函数來表示如下:

(14)　$$\Phi(n+1, \alpha+1; x) = \frac{\alpha}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n}[e^x x^{n-\alpha} \gamma(\alpha, x)]$$

$$n=0, 1, 2, \cdots$$

(15)　$$\Psi(n+1, \alpha+1; x) = \frac{1}{n!(1-\alpha)_n} \frac{\partial^n}{\partial x^n}[e^x x^{n-\alpha} \Gamma(\alpha, x)] \qquad n=0, 1, 2, \cdots$$

上面的第一个公式在 α 为負整数时沒有意义，但在 α 趋近于一負整数之前如除以 $\Gamma(\alpha+1)$ 則仍可有意义. 第二个公式在 α 为正整数时失去意义.

9-2-1. 整数 α 的情形

在本節中

(16)　$$e_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!}, \qquad n=0, 1, 2, \cdots$$

是截尾指数級数，$E_n(x)$ 是 9-2 節所定义的積分. 我們有

(17)　$$\gamma(1+n, x) = n! [1 - e^{-x} e_n(x)],$$

(18)　$$\Gamma(1+n, x) = n! e^{-x} e_n(x)$$

(19) $\Gamma(1-n, x) = x^{1-n} E_n(x)$.

重复作分部積分，我們还可得

(20) $$\Gamma(-n, x) = \frac{(-)^n}{n!}\left[E_1(x) - e^{-x}\sum_{m=0}^{n-1}(-)^n \frac{m!}{x^{m+1}}\right]$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

函数 $\gamma(a, x)$ 在 $a = -n$ 时并不存在，但从 9-1(5) 有

(21) $\gamma^*(-n, x) = x^n$.

应当指出，对于正整数 a 及整数 c，合流超比函数 $\Phi(a, c; x)$ 及 $\Psi(a, c; x)$ 可用这里所討論的函数來表示．对于 Φ，在 $a = 1+n$ 及 $c = 2, 3, \cdots$ 时，这种表示式可从 (14) 式得出．对于其他整数的 c，应以 $\Gamma(c+1)$ 除 (14) 式，并在 c 趋向于这种整数之前，將 (14) 式用 γ^* 表示．对于 Ψ，在 $a = 1+n$ 及 $c = 1, 0, -1, -2, \cdots$ 时我們有 (15) 及 (19)．$c = 2, 3, \cdots$ 的情形可借 6-5(6) 而轉化成前面的一种情形．

当 α 非常接近于一整数时，我們可以計算不完全 γ 函数关于 α 的導数在 α 为整数时的值而得到很有用的不完全 γ 函数的近似式．应用積分表示式 9-1(5)，可証

(22) $$\left.\frac{\partial\gamma^*(\alpha, x)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\ln x - E_1(x),$$

再应用遞推关系可得其他公式．

9-3. 積分表示式及積分公式

基礎積分表示式是第二类不完全欧拉積分式 9-1(1) 及 9-1(2) 其中第一式在 $\mathrm{Re}\,\alpha \leqslant 0$ 时不再收斂．它可用下面的迴綫積分來代替：

(1) $$\gamma(\alpha, x) = -(2i \sin \pi\alpha)^{-1} x^{\alpha} \int_1^{(0+)} e^{-xu}(-u)^{\alpha-1}\, du$$

此处，在積分的迴綫上，$-\pi \leqslant \arg(-u) \leqslant \pi$，$x$ 任意且 $\neq 0$，α 不为整数．以單位圓 $-u = \cos\theta + i\sin\theta$，$-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ 作为積分路

徑，有人得出

$$(2)\qquad \gamma(\alpha, x)=x^{\alpha}\csc\pi\alpha\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos(\alpha\theta+x\sin\theta)\,d\theta.$$

对于 $\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0$, $x\leqslant 0$, 一个实積分式可从 6-11(13) 中導出。

对于 $\Gamma(\alpha, x)$，基礎積分表示式是 9-1(2) 及

$$(3)\qquad \Gamma(\alpha, x)=\frac{e^{-x}x^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{-\alpha}}{x+t}\,dt.$$

將 6-5(2) 应用于 9-1(4) 式的后面一个 Ψ 函数上即可得出上式. 勒上特連分式 9-2(13) 是 (3) 式的一个推論.

其他的積分表示式是

$$(4)\qquad \gamma(\alpha, x)=x^{\frac{1}{2}\alpha}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{2}\alpha-1}J_{\alpha}[2(xt)^{\frac{1}{2}}]\,dt,\qquad \operatorname{Re}\alpha>0.$$

$$(5)\qquad \Gamma(\alpha, x)=\frac{2x^{\frac{1}{2}\alpha}e^{-x}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}\alpha}K_{\alpha}[2(xt)^{\frac{1}{2}}]\,dt\qquad \operatorname{Re}\alpha<1.$$

$$(6)\qquad \Gamma(2-2\alpha)\Gamma(\alpha, -ix)\Gamma(\alpha, ix)$$
$$=2\int_0^{\infty} e^{-xt}t^{-2\alpha}\left[\frac{1}{t+2i}\,{}_2F_1\left(1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}-\alpha; \frac{t}{t+2i}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{t-2i}\,{}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}-\alpha; \frac{t}{t-2i}\right)\right]dt$$
$$\operatorname{Re}\alpha<1,\ \operatorname{Re}x>0,$$

(6)式是 Tricomi (1950 a) 所導出。

几个最重要的積分公式是

$$(7)\qquad \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}\gamma(\alpha, x)\,dt=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\alpha(1+s)^{\alpha+\beta}}$$
$$\times{}_2F_1\left(1, \alpha+\beta; \alpha+1; \frac{1}{1+s}\right),\quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0,\ \operatorname{Re}s>0,$$

$$(8)\qquad \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}\Gamma(\alpha, t)\,dt=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\beta(1+s)^{\alpha+\beta}}$$
$$\times{}_2F_1\left(1, \alpha+\beta; \beta+1; \frac{s}{1+s}\right)$$
$$\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0,\ \operatorname{Re}s>-\tfrac{1}{2},$$

(9) $$\int_0^\infty e^{-st}\gamma(\alpha, t^2)dt = 2^{1-\alpha}\Gamma(2\alpha)s^{-1}e^{s^2/8}D_{-2\alpha}(2^{-\frac{1}{2}}s)$$

$$\operatorname{Re}\alpha > -\tfrac{1}{2},\ \alpha\neq 0,\ \operatorname{Re}s>0,$$

(10) $$\Gamma(\alpha)x^{\alpha-\beta}\int_0^1 e^{-xt}t^{\alpha-\beta-1}\gamma(\beta, x-xt)\,dt$$

$$=\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta)\gamma(\alpha, x), \qquad \operatorname{Re}\alpha>\operatorname{Re}\beta>-1,\ \alpha\beta\neq 0,$$

在 (7) 中的 $\beta=1$ 或 (8) 中的 $\alpha=1$ 时，(7) (8) 中的超比函数簡化为初等函数；在 (9) 式中，D 为抛物柱函数. 可以看出 (3) 至 (9) 式是拉普拉斯積分，其他的積分式見 Nielsen (1906, b, c), Le Caine (1948), Busbridge (1950).

9-4. 級 数

冪級数及連分式展开式已在 9-2 節中說过. 在 9-3(3) 中应用展开式

$$\frac{1}{x+t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)_n}{(x)_{n+1}} \qquad t\geqslant 0,\ \operatorname{Re}x>0,$$

則得反階乘積展开式

(1) $$\Gamma(\alpha, x)=e^{-x}x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{(x)_{n+1}} \qquad \operatorname{Re}x>0,$$

其中

$$C_n=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\alpha}(-t)_n\,dt=(-)^n$$

$$\times\frac{n!}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\alpha}\binom{t}{n}dt.$$

从 9-1(1), 可得

$$\gamma(\alpha, x+y)-\gamma(\alpha, x)=e^{-x}x^{\alpha-1}\int_0^y e^{-u}\left(1+\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1}du.$$

如 $|y|<|x|$, 我們可將 $(1+u/x)^{\alpha-1}$ 展开为二項式級数，逐項積分并应用 9-1(17). 这样我們就可得到誳尔孙展开式

(2) $$\Gamma(\alpha, x)-\Gamma(\alpha, x+y)=\gamma(\alpha, x+y)-\gamma(\alpha,x)$$
$$=e^{-x}x^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)_n(-x)^{-n}[1-e^{-y}e_n(y)],\ |y|<|x|,$$

上式在数値計算上很有用.

不完全 γ 函数出現在很多級数展开式中，其中有很多可以經选定第 6 章中展开式的参数而得出，这里不一一列出．値得注意的是在 $h=0, \alpha=-1$ 时，6-12(7) 中的系数可以用截尾指数級数來表示；6-12(6) 变成

(3) $$\gamma(\alpha, x)=\Gamma(\alpha)e^{-x}x^{\frac{1}{2}\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}e_n(-1)x^{\frac{1}{2}n}I_{n+\alpha}(2x^{\frac{1}{2}}),$$

对于所有的 $x\neq 0$，只要 α 不为負整数，收斂很快．在展开式 6-12(11) 中，系数可用拉甘尔多項式來表示．

如 x 及 y 为正数，且 $x\geqslant y$，則

(4) $$\Gamma(\alpha, x)\gamma(\alpha, y)=e^{-x-y}(xy)^{\alpha}$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)(\alpha)_{n+1}}L_n^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y).$$

当 $y\to 0$ 时，这一展开式的極限情形为

(5) $$\Gamma(\alpha, x)=e^{-x}x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n+1}\qquad x>0$$

它与 Ψ 函数展为拉甘尔多項式級数的展开式 6-12(3) 在 $a=1$ 的特殊情形一致.

其他展开式見 Nielsen (1906, 82 及 83 節).

9-5. 漸近表示式

当 $\alpha\to\infty$, $x=o(|\alpha|)$ 时，9-2(4) 的第一級数是一漸近展开式；当 $x\to\infty$, $\alpha=o(|x|)$时則有 9-2(6)．如 x 及 α 在大小上具有相同的階，則可从 6-13(17) 式得一展开式，但一般却不容易求得这一展开式的一般形式，或很难討論出这一展开式在 α 及 x 同时增大时漸近地表示 $\gamma(\alpha, x)$ 的条件．当 x 及 $\alpha+1$ 近于相等，更

嚴格地說，当 $\alpha\to\infty$ 及 $x=\alpha+1+o(|\alpha|)$ 时，情形相当复什.

特列柯米 (1950 b) 曾經对这一問題作过仔細研究. 他引進参数

$$(1)\qquad z=\frac{\alpha^{1/2}}{x-\alpha}$$

并根据 z 是小或大而分成二种情形.

如 $z\to 0$, $|\arg z|<3\pi/4$, 他証明 $\Gamma(1+\alpha, x)$ 可以

$$(2)\qquad e^{-x}x^{1+\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}l_n(\alpha)n!(x-\alpha)^{-n-1}$$

漸近地表示，其中系数

$$(3)\qquad n!\,l_n(\alpha)=\left\{\frac{d^n}{dt^n}[e^{-\alpha t}(1+t)^{\alpha}]\right\}_{t=0}=L_n^{(\alpha-n)}(\alpha)$$

是 α 的某一 $[n/2]$ 次多項式. 这些多項式也曾由他作过詳細研究 (Tricomi, 1951). 特別是，我們有

$$(4)\qquad \Gamma(1+\alpha, x)=\frac{e^{-x}x^{\alpha+1}}{x-\alpha}$$

$$\times\left[1-\frac{\alpha}{(x-\alpha)^2}+\frac{2\alpha}{(x-\alpha)^3}+O(|\alpha|^2|x-\alpha|^{-4})\right]$$

如 $z\to\infty$, (当 x 及 α 接近相等)，則应根据 $\operatorname{Re}\alpha$ 为正或为負而分为二种情形。在后面一种情形下，特列柯米应用下面的函数

$$(5)\qquad \gamma_1(\alpha, x)=\Gamma(\alpha)x^{\alpha}\gamma^*(\alpha, -x)\qquad x>0.$$

于是，在 $\alpha\to+\infty$ 及 y 为有界时，他得到

$$(6)\qquad \gamma[1+\alpha, \alpha+(2\alpha)^{1/2}y]$$

$$=\Gamma(1+\alpha)[\tfrac{1}{2}+\pi^{-1/2}\operatorname{Erf}(y)+O(\alpha^{-1/2})],$$

$$(7)\qquad \Gamma(\alpha)\gamma_1[1-\alpha, \alpha+2(2\alpha)^{1/2}y]$$

$$=-\pi\operatorname{ctn}(\alpha\pi)+2\pi^{1/2}\operatorname{Erfi}(y)+O(\alpha^{-1/2}).$$

对于 $\alpha=n$, 我們有

$$(8)\qquad e_n[n+(2n)^{1/2}y]$$

$$=\exp[n+(2n)^{1/2}y]\cdot[\tfrac{1}{2}-\pi^{-1/2}\operatorname{Erf}(y)+O(n^{-1/2})].$$

还可参看 Furch (1939) 及 Blanch 在 Placzek (1946) 著作中所作的增訂部分.

9-6. 零点及摹繪性質

关于实数 α 及 x 的零点情形可从 6-16 節的結果中導出。从此可知 $\gamma(\alpha, x)$ 的零点情况为:

(i) 如 $\alpha \geqslant 0$, 則沒有实零点(除 $x=0$ 以外)

(ii) 如 $1-2n<\alpha<2-2n$, $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 則有一負零点 x' 而沒有正零点.

(iii) 如 $-2n<\alpha<1-2n$, $n=1, 2, \cdots$, 則有一負零点 x' 及一正零点 x''.

这些零点作为 α 的函数时的一般性态可从 γ^* 的高度綫圖 (159 頁)上看出。

在大的 α 情形下, 向零点的逼近式曾由特列柯米 (1950 b) 求得;他証明:

$$x'=-(1-\alpha)[1+2^{1/2}(1-\alpha)^{-1/2}y^*(\alpha)+O(|\alpha|^{-1})], \tag{1}$$

$$x''=-\tau\alpha-\frac{\tau}{1+\tau}\ln\frac{1+\tau(-\alpha\pi/2)^{1/2}}{\sin\alpha\pi} \tag{2}$$

$$+O[|\alpha|^{-1}(\ln|\alpha|)^2].$$

这里 $y^*(\alpha)$ 是方程

$$\operatorname{Erf}(y)=(\pi/2)^{1/2}\operatorname{ctn}(\alpha y) \tag{3}$$

的唯一正根,且 $\tau=0.278463\cdots$ 是方程

$$1+x+\ln x=0 \tag{4}$$

的唯一正根.

如 $\alpha>0$ 是固定的,則 $\gamma(\alpha, x)$ 在 $x>0$ 时顯然是 x 的單調增函数,并且在 x 由 0 增至 ∞ 时由 0 增至 $\Gamma(\alpha)$. 可以証明, 对于固定的 $x>0$, 函数 $\Gamma(\alpha, x)/\Gamma(\alpha)$ 在 $\alpha>0$ 时是 α 的單調減函数. 在实 α, x 平面的其他象限中,不完全 γ 函数曾由特列柯米研究过

(1951)，他置

$$(5)\qquad \Gamma(\alpha, x) = -\alpha^{-1} e^{-x} x^{\alpha} G(\alpha, x) \qquad \alpha \leqslant 0,\ x \geqslant 0.$$

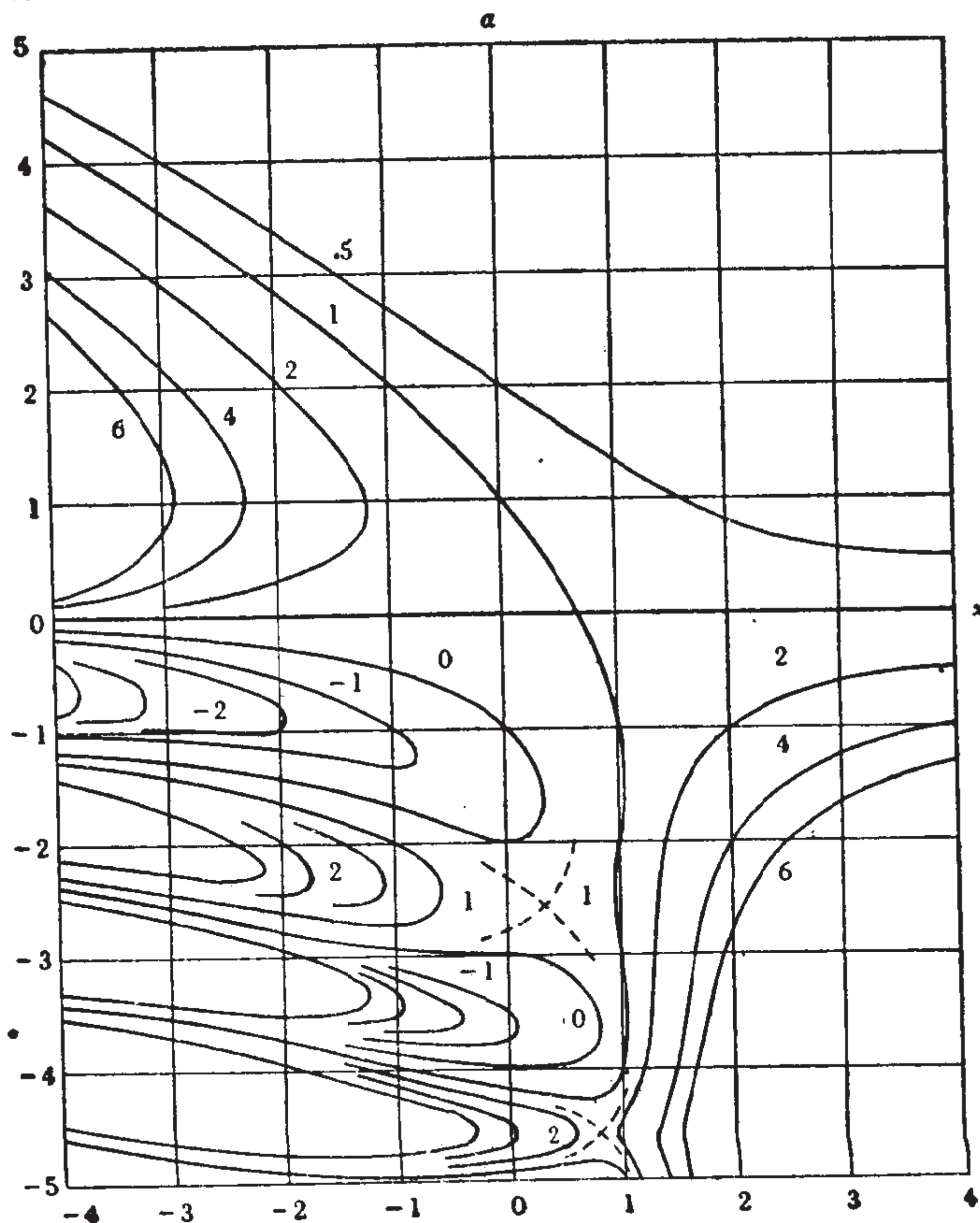
$$(6)\qquad \gamma_1(\alpha, x) = \alpha^{-1} e^{x} x^{\alpha} g_1(\alpha, x) \qquad \alpha \geqslant 0,\ x \leqslant 0.$$

$$(7)\qquad \gamma^*(-\alpha, -x) = \Gamma(\alpha+1) e^{x} k(\alpha, x) \qquad \alpha \geqslant 0,\ x \geqslant 0,$$

并証明，在整个定义域中

$$\frac{\partial G}{\partial x}<0,\ \frac{\partial G}{\partial \alpha}<0,\ \frac{\partial g_1}{\partial x}<0,\ \frac{\partial g_1}{\partial \alpha}>0,\quad |k|\leqslant 1,$$

如$\alpha\geqslant 1$，則$|k|\leqslant 1/2$，此外，他还証明作为x的函数的k在$0<\alpha<1$时只有一个極大或極小，而当$\alpha>1$时則有二个極大或極小．



$\gamma^*(\alpha, x)$的高度綫圖

高度綫圖（見159頁）采自特列柯米的著作，它表示曲綫 $\gamma^*(\alpha, x)=\text{const.}$

特殊不完全 γ 函数

9-7. 指数積分及对数積分

我們要討論的主要函数是：

(1) $E_1(x)=-\mathrm{Ei}(-x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{-1}dt=\Gamma(0,x)=e^{-x}\Psi(1,1,x)$

(2) $E^*(x)=-\int_{-x}^\infty e^{-t}\,t^{-1}\,dt$ $\qquad x>0.$

(3) $\mathrm{li}(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t}=\mathrm{Ei}(\ln x)=-E_1(-\ln x).$

在 (2) 式中，積分是柯西主值，卽当 $\varepsilon\to 0$ 时是

$$\lim\left(\int_{-x}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right) \qquad \varepsilon>0;$$

这一函数在楊基-愛姆特的著作(p. 2)中記为 $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$. 在(1) 及 (2) 式所定义的函数之間有如下的关系

(4) $-E_1(xe^{\pm i\pi})=E^*(x)\pm i\pi$ $\qquad x>0.$

下面的以及其他的一些公式，都可以从本章开头部分的結果中令 $\alpha\to 0$ 而得出：

(5) $\mathrm{Ei}(-x)=\gamma+\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!n}$

$$=\gamma+\ln x-e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}(1+½+\cdots+1/n)\frac{x^n}{n!}$$

(6) $E^*(x)=\gamma+\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!n}$

式中 γ 是 1-7-2 節中的欧拉常数.

(7) $E_1(x)=x^{-1}e^{-x}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{m!}{(-x)^m}+O(|x|^{-M})\right]$

$$|x|\to\infty,\ -3\pi/2<\arg x<3\pi/2,\ M=1,2,\cdots$$

(8) $$E^*(x)=x^{-1}e^x\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{m!}{x^m}+O(|x|^{-M})\right]$$

$$x\to\infty,\ x>0,\ M=1,2,\cdots$$

(9) $$\frac{d^n\,\mathrm{Ei}(-x)}{dx^n}=(-)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}e^{-x}e_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots$$

(10) $$\frac{d^n[e^x\,\mathrm{Ei}(-x)]}{dx^n}=e^x\,\mathrm{Ei}(-x)+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-)^m m!}{x^{m+1}},\ n=1,2,\cdots$$

(11) $$\int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}\,\mathrm{Ei}(-t)\,dt=-\frac{\Gamma(\beta)}{\beta(1+s)^\beta}\,{}_2F_1\left(1,\beta;\beta+1;\frac{s}{1+s}\right)$$

$$\mathrm{Re}\,\beta>0,\ \mathrm{Re}\,s>-½.$$

在这些公式之外，还有雷皮積分式

(12) $$\int_0^\infty\frac{\sin(xt)}{a^2+t^2}\,dt=\frac{1}{2a}\left[e^{ax}E_1(ax)+e^{-ax}E^*(ax)\right]$$

$$a>0,\ x>0.$$

(13) $$\int_0^\infty\frac{t\cos(xt)}{a^2+t^2}\,dt=½\left[e^{ax}E_1(ax)-e^{-ax}E^*(ax)\right]$$

$$a>0,\ x>0.$$

这二公式都可从 (1) 及 (2) 中導出，且

(14) $$\int_a^\infty(b+t)^{-1}e^{-ct}\,dt=e^{bc}E_1[(a+b)c],\qquad \mathrm{Re}\,c>0,$$

(15) $$\int_1^\infty e^{-xt}\ln t\,dt=x^{-1}E_1(x)\qquad \mathrm{Re}\,x>0,$$

(16) $$\int_x^\infty t^{a-1}E_1(t)\,dt=a^{-1}\left[\Gamma(a,x)-x^aE_1(x)\right],$$

$$\mathrm{Re}\,x>0,\ a\neq 0.$$

其他的公式見 Nielsen (1906, 主要是第 2 及第 4 章)、Le Caine (1948)、Busbridge (1950).

从 9-4(5)，可得

(17) $$E_1(x)=e^{-x}\sum_{n=0}^\infty\frac{L_n(x)}{n+1}\qquad x>0.$$

又从 9-4(2)，有

(18)　$E_1(x+y)=E_1(x)+e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} n!(-x)^{-n-1}[1-e^{-y}e_n(y)]$

$|y|<|x|.$

li (x) 的公式可从 $E_1(x)$ 的公式中導出.

波在散逸介質中傳播的研究中出現有指数積分函数的某些推廣,典型的一个例子就是

$$\int_0^x e^{-u}u^{-1}\,dt,\quad 其中\ u=(a^2+t^2)^{1/2}.$$

这一式及有关函数可参看 Harvard University (1949 b).

9-8. 正弦及余弦積分

近代表上所用的定义是

(1)　$\mathrm{si}\,x=\int_\infty^x \frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{1}{2i}[\mathrm{Ei}(ix)-\mathrm{Ei}(-ix)]$

(2)　$\mathrm{Si}\,x=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}+\mathrm{si}\,x$

(3)　$\mathrm{Ci}\,x=\int_\infty^x \frac{\cos t}{t}\,dt=\frac{1}{2}[\mathrm{Ei}(ix)+\mathrm{Ei}(-ix)].$

(4)　$\mathrm{Ei}(\pm ix)=\mathrm{Ci}\,x\pm i\,\mathrm{si}\,x$

此处 $\pm i=\exp(\pm\frac{1}{2}i\pi)$. 聶尔孙 (1906) 所用的定义中, si 与这里的相同,但以 ci 代替了这里的 Ci. 有些作者定义 Ci, Si 稍有不同.

$\mathrm{Si}x$ 及 $\mathrm{si}\,x$ 都是 x 的整函数,

(5)　$\mathrm{Si}(-x)=-\mathrm{Si}(x),\ \mathrm{si}(-x)=-\pi-\mathrm{si}\,x.$

$\mathrm{Ci}\,x$ 是一多值函数,在 $x=0$ 处具有一对数支点. 不过

(6)　$\mathrm{Ci}\,x=\gamma+\ln x-\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt,$

因此 $\mathrm{Ci}\,x-\ln x$ 是 x 的偶整函数. 特别是,我們有

(7)　$\mathrm{Ci}(xe^{\pm i\pi})=\mathrm{Ci}\,x\pm i\pi,$　　　　$x>0.$

下面的一些公式，以及还有很多其他公式，都可从定义中直接得出，或者可从本章前部的結論中得出：

(8) $$\mathrm{Si}\, x = \tfrac{1}{2}\pi + \mathrm{si}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)},$$

(9) $$\mathrm{Ci}\, x = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n x^{2n}}{(2n)!\,(2n)}.$$

(10) $$\mathrm{si}\, x = -\cos x\left[\sum_{m=1}^{M-1} \frac{(-)^m (2m)!}{x^{2m+1}} + O(|x|^{-2M-1})\right]$$
$$+\sin x\left[\sum_{m=1}^{N-1} \frac{(-)^m (2m-1)!}{x^{2m}} + O(|x|^{-2N})\right]$$
$$-\pi < \arg x < \pi,\quad M,\ N = 1, 2, 3, \cdots$$

(11) $$\mathrm{Ci}\, x = \cos\left[\sum_{m=1}^{N-1} \frac{(-)^m (2m-1)!}{x^{2m}} + O(|x|^{-2N})\right]$$
$$+\sin x\left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-)^m (2m)!}{x^{2m+1}} + O(|x|^{-2M-1})\right]$$
$$-\pi < \arg x < \pi,\quad M,\ N = 1, 2, \cdots$$

(12) $$\int_0^{\infty} e^{-st}\, \mathrm{Ci}\,(t)\, dt = -\frac{1}{2s} \ln(1+s^2) \qquad \mathrm{Re}\, s > 0,$$

(13) $$\int_0^{\infty} e^{-st}\, \mathrm{si}\,(t)\, dt = -\frac{1}{s} \tan^{-1} s, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0,$$

(14) $$\int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{-1} \ln(1+t^2)\, dt = [\mathrm{Ci}\,(s)]^2 + [\mathrm{si}\,(s)]^2, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0,$$

(15) $$\int_0^{\infty} \sin x\, \mathrm{si}\, x\, dx = \int_0^{\infty} \cos x\, \mathrm{Ci}\, x\, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

(16) $$\int_0^{\infty} \mathrm{si}\, x\, \mathrm{Ci}\, x\, dx = -\ln 2,$$
$$\int_0^{\infty} (\mathrm{si}\, x)^2 dx = \int_0^{\infty} (\mathrm{Ci}\, x)^2\, dx = \frac{1}{2}\pi.$$

其他的公式可看参 Nielsen (1906 b, 主要是第 4 章).

有时还用下面的記法

(17) $$\mathrm{Shi}\, x=\int_0^x \mathrm{sh}\, t\,\frac{dt}{t}=-i\,\mathrm{Si}(ix),$$

(18) $$\mathrm{Chi}\, x=\gamma+\ln x+\int_0^x \frac{\mathrm{ch}\, t-1}{t}\,dt=\mathrm{Ci}(ix)-\tfrac{1}{2}\,i\pi.$$

下面的推廣

(19) $$\int_0^x \sin u\,\frac{dt}{u},\quad u=(a^2+t^2)^{1/2}$$

及其他类似的推廣也曾被討論过(Harvard University, 1949 a).

9-9. 誤差函数

这一类中的主要函数是

(1) $$\mathrm{Erf}\, x=\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\tfrac{1}{2}\,\gamma(\tfrac{1}{2},\, x^2)=x\Phi(\tfrac{1}{2},\, \tfrac{3}{2};\, -x^2)$$
$$=xe^{-x^2}\,\Phi(1,\, \tfrac{3}{2};\, x^2)$$

(2) $$\mathrm{Erfc}\, x=\int_x^\infty e^{-t^2}dt=\tfrac{1}{2}\,\pi^{1/2}-\mathrm{Erf}\, x$$
$$=\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2},\, x^2)=\tfrac{1}{2}\,e^{-x^2}\,\Psi(\tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2};\, x^2).$$

(3) $$\mathrm{Erfi}\, x=-i\,\mathrm{Erf}\,(ix)=\int_0^x e^{t^2}\,dt=x\Phi(\tfrac{1}{2},\, \tfrac{3}{2};\, x^2),$$

(4) $$\mathrm{H}(x)=2\pi^{-1/2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=2\pi^{-1/2}\,\mathrm{Erf}\, x=1-2\pi^{-1/2}\,\mathrm{Erf}\, x.$$

(5) $$\alpha(x)=(2/\pi)^{1/2}\int_0^x e^{-1/2 t^2}\,dt=2\pi^{-1/2}\,\mathrm{Erf}\,(2^{-1/2}x).$$

前面三个函数是数学工作中最常用的,(2)式是由克倫潑(1799)原先提出的,但記法和这里的不同. 函数 (4) 在数值工作中常用,而(5) 式則常用在統計学中. 所有这些函数都有很多記法.

所有的誤差函数都是整函数; Erf x 及 Erfi x 是 x 的奇函数. 下面的許多公式中,其大部分都可直接从定义推出,或从本章的前面結果中導出:

(6) $$\operatorname{Erf} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}=e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(3/2)_n}$$

(7) $$\operatorname{Erfi} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}=e^{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n x^{2n+1}}{(3/2)_n}$$

(8) $$\operatorname{Erfc} x=\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-)^m(1/2)_m}{x^{2m+1}}+O(|x|^{2M-1})\right]$$

$\operatorname{Re}x>0,\ x\to\infty,\ M=1,2,\cdots$

(9) $$\operatorname{Erfi} x=-\tfrac{1}{2}i\pi^{1/2}+\tfrac{1}{2}e^{x^2}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(1/2)_m}{x^{2m+1}}+O(|x|^{-2M-1})\right]$$

$x>0,\ x\to\infty,\ M=1,2,\cdots$

(10) $$\int_0^\infty e^{-a^2t^2-bt}\,dt=a^{-1}\exp\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)\operatorname{Erfc}\left(\frac{b}{2a}\right),\qquad \operatorname{Re}a>0,$$

(11) $$\int_0^\infty \operatorname{Erf}(at)e^{-st}\,dt=s^{-1}\exp\left(\frac{s^2}{4a^2}\right)\operatorname{Erfc}\left(\frac{s}{2a}\right)$$

$|\arg a|<\tfrac{1}{4}\pi,\ \operatorname{Re}s>0.$

(12) $$\int_0^\infty \operatorname{Erf}(at)^{1/2}e^{-st}\,dt=\tfrac{1}{2}(a\pi)^{1/2}s^{-1}(a+s)^{-1/2},$$

$\operatorname{Re}s>0,\ \operatorname{Re}(a+s)>0,$

(13) $$\int_0^\infty \operatorname{Erfc}(at^{-1/2})e^{-st}\,dt=\tfrac{1}{2}\pi^{1/2}s^{-1}e^{-2as^{1/2}},$$

$|\arg a|<\tfrac{1}{4}\pi,\ \operatorname{Re}s>0.$

(14) $$\int_0^\infty \operatorname{Erfi}(at)e^{-a^2t^2-st}\,dt=\frac{-1}{4a}\exp\left(\frac{s^2}{4a^2}\right)\operatorname{Ei}\left(-\frac{s^2}{4a^2}\right)$$

$\operatorname{Re}s>0,\ |\arg a|<\tfrac{1}{4}\pi.$

(15) $$\int_0^1 e^{-a^2t^2}\frac{dt}{1+t^2}=e^{a^2}[\tfrac{1}{4}\pi-(\operatorname{Erf}a)^2],\qquad \operatorname{Re}a>0,$$

(16) $$\int_0^x \operatorname{Erf}t\,dt=x\operatorname{Erf}x-\tfrac{1}{2}(1-e^{-x^2}),$$

(17) $$\frac{d^{n+1}\operatorname{Erf}x}{dx^{n+1}}=(-)^n e^{-x^2}H_n(x),\qquad n=0,1,2,\cdots$$

这里 H_n 是第 10 章的漢米特多项式．

聶尔孙型的一个級数如下:

(18)
$$\operatorname{Erf}[(x+y)^{1/2}] = \operatorname{Erf}(x^{1/2}) + \frac{e^{-x}}{2x^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{\gamma(n+1, y)}{x^n}$$
$$|y| < |x|.$$

展开为貝塞尔函数的級数(Tricomi, 1951)如下:

(19)
$$\operatorname{Erf}(x) = \tfrac{1}{2}(\pi x)^{1/2} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} e_n(-1) x^n \mathrm{I}_{n+1/2}(2x),$$

(20)
$$\operatorname{Erf}(x^{1/2}) = (\tfrac{1}{2}\pi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{[n/2]} I_{n-1/2}(x),$$

(21)
$$\operatorname{Erfi}(x^{1/2}) = (\tfrac{1}{2}\pi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{[n/2]} I_{n+1/2}(x)$$

这些展开式中的第一个是 9-4(3) 的一特殊情形. 其余二个可用拉普拉斯变换來証明.

最近关于誤差函数的論文是 Rosser(1948) 所提出的,他把重積分

(22)
$$\int_0^z e^{-p^2y^2}\,dy \int_0^y e^{-x^2}\,dx, \qquad n=1, 2, \cdots$$

作为复变数 p, z 的函数進行討論,并討論了其他有关的積分. 誤差函数的叠積分曾由 Hartree (1936) 研究过,他命

(23)
$$i^0 \operatorname{erfc} x = 2\pi^{-1/2} \operatorname{Erfc} x,\ i^n \operatorname{erfc} x = \int_x^{\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc} t\,dt.$$

9-10. 弗列司納耳積分及其推廣

弗列司納耳積分为

$$C(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^x t^{-1/2} \cos t\,dt,$$

$$S(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^x t^{-1/2} \sin t\,dt.$$

我們將研究 Böhmer (1939) 所介紹的更一般的積分來代替上面二

个積分，它們是

(1) $$C(x,\alpha)=\int_x^\infty t^{\alpha-1}\cos t\,dt$$
$$=\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\pi\alpha}\Gamma(\alpha,ix)+\tfrac{1}{2}e^{+\frac{1}{2}i\pi\alpha}\Gamma(\alpha,-ix),$$

(2) $$S(x,\alpha)=\int_x^\infty t^{\alpha-1}\sin t\,dt$$
$$=\frac{1}{2i}e^{\frac{1}{2}i\pi\alpha}\Gamma(\alpha,-ix)-\frac{1}{2i}e^{-\frac{1}{2}i\pi\alpha}\Gamma(\alpha,ix).$$

同样的函数，但記法不同，曾由彼得曼 (1946) 研究过．很明顯，有

(3) $$\Gamma(\alpha,ix)=e^{\frac{1}{2}i\pi\alpha}[C(x,\alpha)-iS(x,\alpha)].$$

弗列司納耳積分为

(4) $$C(x)=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\int_0^{x^{\frac{1}{2}}}\cos(t^2)dt=\tfrac{1}{2}-(2\pi)^{-\frac{1}{2}}C(x,\tfrac{1}{2})$$
$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}[e^{-\frac{1}{4}i\pi}\operatorname{Erf}(e^{+\frac{1}{4}i\pi}x^{\frac{1}{2}})+e^{\frac{1}{4}i\pi}\operatorname{Erf}(e^{-\frac{1}{4}i\pi}x^{\frac{1}{2}})]$$

(5) $$S(x)=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\int_0^{x^{\frac{1}{2}}}\sin(t^2)dt=\tfrac{1}{2}-(2\pi)^{-\frac{1}{2}}S(x,\tfrac{1}{2})$$
$$=i(2\pi)^{-\frac{1}{2}}[e^{-\frac{1}{4}i\pi}\operatorname{Erf}(e^{\frac{1}{4}i\pi}x^{\frac{1}{2}})-e^{\frac{1}{4}i\pi}\operatorname{Erf}(e^{-\frac{1}{4}i\pi}e^{\frac{1}{2}})]$$

大体上还有下面一些公式：

(6) $$C(x,\alpha)=\Gamma(\alpha)\cos(\tfrac{1}{2}\alpha\pi)-\sum_{m=0}^\infty\frac{(-)^m x^{2m+\alpha}}{(2m)!\,(2m+\alpha)},$$

(7) $$S(x,\alpha)=\Gamma(\alpha)\sin(\tfrac{1}{2}\alpha\pi)-\sum_{m=0}^\infty\frac{(-)^m x^{2m+1+\alpha}}{(2m+1)!\,(2m+1+\alpha)}$$

(8) $$C(x,\alpha)=-x^\alpha[P(x)\sin x+Q(x)\cos x],$$

(9) $$S(x,\alpha)=x^\alpha[P(x)\cos x-Q(x)\sin x],$$

此处

(10) $$P(x)=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-)^m(1-\alpha)_{2m}}{x^{2m+1}}+O(|x|^{-2M-1})$$
$$Q(x)=\sum_{m=1}^{M}\frac{(-)^m(1-\alpha)_{2m-1}}{x^{2m}}+O(|x|^{-2M-2})$$
$$x\to\infty,\ -\pi<\arg x<\pi,\ M=1,2,\cdots$$

(11) $\int_0^\infty e^{-st}C(t,\alpha)dt=s^{-1}\Gamma(\alpha)[\cos(\frac{1}{2}\alpha\pi)-\frac{1}{2}(s+i)^{-\alpha}$
$-\frac{1}{2}(s-i)^{-\alpha}]$ $\quad \mathrm{Re}\, s>0,\ -1<\mathrm{Re}\,\alpha.$

(12) $\int_0^\infty e^{-st}S(t,\alpha)dt=s^{-1}\Gamma(\alpha)[\sin(\frac{1}{2}\alpha\pi)-\frac{1}{2}i(s+i)^{-\alpha}$
$+\frac{1}{2}i(s-i)^{-\alpha}]$ $\quad \mathrm{Re}\, s>0,\ -1<\mathrm{Re}\,\alpha,$

(13) $\int_0^\infty t^{\beta-1}C(t,\alpha)dt=\beta^{-1}\Gamma(\alpha+\beta)\cos[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\pi]$
$\mathrm{Re}\,\beta>0,\ 0<\mathrm{Re}\,(\alpha+\beta)<1,$

(14) $\int_0^\infty t^{\beta-1}S(t,\alpha)dt=\beta^{-1}\Gamma(\alpha+\beta)\sin[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\pi]$
$\mathrm{Re}\,\beta>0,\ 0<\mathrm{Re}\,(\alpha+\beta)<1,$

(15) $C(x)=J_{1/2}(x)+J_{5/2}(x)+J_{9/2}(x)+\cdots,$

(16) $S(x)=J_{3/2}(x)+J_{7/2}(x)+J_{11/2}(x)+\cdots.$

$$[C(x,\alpha)]^2+[S(x,\alpha)]^2$$

的一个積分表示式可从 9-3(6) 式導出.

对于固定的 α, $0<\alpha<1$, 由参数方程

(17) $\xi=C(t,\alpha),\ \eta=S(t,\alpha)$ $\quad t\geqslant 0$

表示的曲綫是一螺綫,由 Böhmer (1939) 研究过,在 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,它变为一 Cornu 螺綫. 値得注意的是这一螺綫具有一簡單的"禀性方程"

(18) $\rho=(\alpha s)^{1-1/\alpha}$

此处 ρ 为曲率半徑, s 为弧長.

参考文献

Bateman, Harry, 1946: *Proc. Nat. Acad. Sci.* 32, 70-72.

Böhmer, Eugen, 1939: *Differenzengleichungen und bestimmte Integrale*, Leipzig.

Busbridge, I. W., 1950: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 1, 176-184.

Furch, R., 1939: *Z. Physik* 112, 92-95.

Hartree, D. R., 1936: *Manchester Memoirs*. 80, 85-102.

Harvard University, 1949 a: *Annals of the Computation Laboratory*, Vols. XVIII *and* XIX, *Generalized sine-and cosine-integral functions*. Parts I and II. Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Harvard University, 1949 b: *Annals of the Computation Laboratory*, Vol. XXI. *Tables of the generalized exponential-integral functions*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Jahnke, Eugen and Fritz Emde, 1945: *Tables of functions with formulas and curves*, Dover Publications, New York.

Kramp, Christian, 1799: *Analyse des Réfractions*, Strasbourg and Leipzig.

Le Caine, J., 1948: *National Research Council of Canada, Division of Atomic Energy*. Document No. MT-131 (NRC 1553), 45, pp.

Legéndre, A. M., 1811: *Exercises de calcul intégral*, Paris.

Nielsen, Niels, 1906 a: *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, 326 pp.

Nielsen, Niels, 1906 b: *Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transcendenten*, 106. pp., B. G. Teubner, Leipzig.

Nielsen, Niels, 1906 c: *Monatsch. Math. Phys*. 17, 47-58.

Placzek, George, 1946: *National Research Council of Canada, Division of Atomic Energy*, Document No. MT-1, 39 pp.

Prym, F. E., 1877: *J. Math*. 82, 165-172.

Rosser, J. B., 1948: *Theory and application of*

$$\int_0^z e^{-x^2}\,dx \text{ and } \int_0^z e^{-p^2 y^2}\,dy \int_0^y e^{-x^2}\,dx$$

Mapleton House ,Brooklyn, New York.

Schlömilch, Oskar, 1871: *Z. Math. Phys*. 16, 261-262.

Tannery, Jules, 1882: *Comptes Rendus* 94, 1698-1701, 95, 75.

Tricomi, F. G., 1950 a: *Boll. Un. Mat. Ital*. (3) 4, 341-344.

Tricomi, F. G., 1950 b: *Z. Math*. 53, 136-148.

Tricomi, F. G., 1951: *Ann. Mat. Pura Appl*. (4) 28, 263-289.

Tricomi, F. G., 1951: *J. D'Analyse Math*. 1, 209-231.

第十章　正交多項式

有关正交多項式方面的标准書籍是 Szegö(1939)的著作，对于这一本書，我們今后要常常提到．Shohat, Hille 及 Walsh(1940)列出了一个到1938年为止的系統目錄．我們目前这一章虽然只討論正交多項式，但在开头的时候，我們需要研究一下較一般的正交函数系．关于正交函数系方面更進一步的論述，可参看 Kaczmarz 及 Steinhaus(1935)、Tricomi(1948)及 Vitali 与 Sansone(1946)的著作．

10-1. 正交函数系

給定一个区間 (a, b) 及一个非負的**权函数** $w(x)$，我們可有标積

$$(1)\qquad (\varphi_1, \varphi_2) \equiv \int_a^b w(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx,$$

这对所有函数 φ 只要 $w^{1/2}\varphi$ 在 (a, b) 上为二次可積，都有定义．更一般地說，一个标積可以用下面的斯第耳吉司積分來定义

$$(2)\qquad (\varphi_1, \varphi_2) \equiv \int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,da(x),$$

这里 $a(x)$为一非降函数．如 $a(x)$为絕对連續，則以 $w(x)=a'(x)$，(2)式即轉化为(1)式．另一方面，如 $a(x)$为一跳躍函数，即除了在 $x=x_i$ 处有值 w_i 的跳躍外都是常数，那么(2)化为和

$$(3)\qquad (\varphi_1, \varphi_2) = \sum_i w_i\,\varphi_1(x_i)\,\varphi_2(x_i).$$

这可当作是一个离散变数的函数的定义．

上面定义中所提的是一个实变数的实函数，在本章中，我們將只限于这一情形．如果所論函数是复数值函数，或者積分区域不

是实軸上的区間而是复平面中的弧段，那么在所有上面这些定义中，$\varphi_2(x)$ 应以其軛复数量來代替．

除了在后面的几節[其中所用的是定义(3)]以外，一般所用的都是定义(1)，而且我們总認为 $w(x)$在几乎所有情况下都是正的、可積的．不过，应当指出，在前面几節中所得的許多結果对于标積的定义式 (2)，因而也是定义式 (3) 都是成立的．

两个函数，如果它們的标積等于零，就称为是相互正交的．一族函数，如果它們之中任意不同的二函数在区間(a, b)上与权函数 $w(x)$ [或与分布函数 $\alpha(x)$] 滿足条件 $(\varphi_1, \varphi_2)=0$，則称这一族函数为区間 (a, b) 上的正交函数系．由于二次可積函数間的区間都是可以分离的，故知任何一个正交系必包含有限数的或者可数無限多的元素．因此我們常可將一正交系寫成一有限或無限的序列，$\varphi_0(x), \varphi_1(x)\cdots$或 $\{\varphi_n(x)\}$，而正交性則可表达为：

$$(4)\qquad (\varphi_h, \varphi_k)=0 \qquad\qquad h\neq k.$$

我們將假設 $\{\varphi_n(x)\}$ 中不包含任何零函数，也就是說对于所有的 h，(φ_h, φ_h) 都是正的．这样，就不难看出一个正交系的任一有限子集中的函数都是綫性無关的，换言之，如下的关系

$$(5)\qquad c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_k\varphi_k(x)=0$$

在(a, b)区間上几乎不能到处成立，除非 $c_0=c_1=\cdots=c_k=0$. [与 $\varphi_h(x)$ $(h=0, 1, \cdots, k)$ 組成标積]．

函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 組成一**規格化正交系**，是指它满足下面的条件：

$$(6)\qquad (\varphi_h, \varphi_k)=\begin{cases}0, & \text{如 } h\neq k,\\ 1, & \text{如 } h=k.\end{cases}$$

每一个正交函数系都可以使之規格化，只要以 $(\varphi_h, \varphi_h)^{-1/2}\varphi_h(x)$ 代 $\varphi_h(x)$ 即可．

綫性無关的函数的一个序列 $\{\varphi_n(x)\}$ (有限的或無限的)，如能組成適当的綫性組合，就可使之关于标積 (2) 正交化．例如，如可

循序令

$$(7)\quad \begin{aligned} \varphi_0(x) &= \psi_0(x), \\ \varphi_1(x) &= \mu_{10}\varphi_0(x) + \psi_1(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x) &= \mu_{n0}\varphi_0(x) + \mu_{n1}\varphi_1(x) + \cdots + \mu_{n,n-1}\varphi_{n-1}(x) + \psi_n(x). \end{aligned}$$

幷置

$$(8)\quad \mu_{nm} = -(\psi_n, \varphi_m)/(\varphi_m, \varphi_m), \qquad m = 0, 1, \cdots, n-1,$$

則 $\{\varphi_n(x)\}$ 將为一正交系.

或者，我們可令

$$(9)\quad \varphi_n(x) = \lambda_{n0}\psi_0(x) + \lambda_{n1}\psi_1(x) + \cdots + \lambda_{nn}\psi_n(x), \qquad \lambda_{nn} \neq 0.$$

而后确定各个 λ，使 $\{\varphi_n(x)\}$ 成为正交系. 一个可能的确定是

$$(10)\quad \phi_n(x) = \begin{vmatrix} (\psi_0, \psi_0) & (\psi_0, \psi_1) & \cdots & (\psi_0, \psi_n) \\ (\psi_1, \psi_0) & (\psi_1, \psi_1) & \cdots & (\psi_1, \psi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\psi_{n-1}, \psi_0) & (\psi_{n-1}, \psi_1) & \cdots & (\psi_{n-1}, \psi_n) \\ \psi_0(x) & \psi_1(x) & & \psi_n(x) \end{vmatrix}.$$

顯然，$\{\phi_n(x)\}$ 是一正交系，因为 (10) 与 $\psi_0(x), \psi_1(x), \cdots, \psi_{n-1}(x)$ 正交，因此，与所有 $m<n$ 的 $\phi_m(x)$ 正交. 此外，任一形如(9)式的正交系都是 $\{\phi_n(x)\}$ 的常数倍数.

为了使系 (9) 規格化，我們引用格命行列式 G_n，它是 $\phi_{n+1}(x)$ 的表达式 (10) 中 $\psi_{n+1}(x)$ 的余因子. G_n 也是 $\xi_0, \cdots \xi_n$ 的正有限二次型

$$\int_a^b [\xi_0\psi_0(x) + \cdots + \xi_n\psi_n(x)]^2 w(x)\,dx$$

的判别式，因此也是正的. 我們再令 $G_{-1}=1$. 因此形如 (9) 式的規格化正交系 $(\lambda_{nn}>0)$ 可被唯一地确定为

$$(11)\quad \varphi_n(x) = (G_{n-1}G_n)^{-1/2}\phi_n(x).$$

此外，还可建立下面的積分表示式

$$(12)\quad \phi_n(x)=[(n-1)!]^{-1}\int^{(n)}\Psi_{n-1}(\xi_0,\cdots,\xi_{n-1})\Psi_n(\xi_0,\cdots,\xi_{n-1},x)$$
$$\times w(\xi_0)\cdots w(\xi_{n-1})\,d\xi_0,\cdots d\xi_{n-1},\qquad n=1,2,\cdots$$

这里的積分是区間 (a,b) 上的 n 重積分，且

$$(13)\quad \Psi_n(x_0,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}\psi_0(x_0) & \psi_1(x_0) & \cdots & \psi_n(x_0)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \psi_0(x_n) & \psi_1(x_n) & \cdots & \psi_n(x_n)\end{vmatrix}.$$

(見 Szegö, 1939, 2-1 節).

在这一章里，我們將討論函数 $\psi_n(x)=x^n$ 的正交化問題，如形式(9). 因此得到正交多項式的序列 $\{p_n(x)\}$, $n=0,1,2,\cdots$, 此处 $p_k(x)$ 恰为 x 的 k 次多項式，对于 $h,k=0,1,2,\cdots$ 及 $h\neq k$, 有 $(p_h,p_k)=0$.

区間和权函数(或分布函数)可确定一正交多項式系，但每一 $p_n(x)$ 中还有一个任意的常数因子. 系中的多項式可由附加条件來标准化. 最常用的三个附加条件是: (i) $\{p_n(x)\}$ 应是一規格化正交系，而且 $p_n(x)$ 中 x^n 的系数应是正数; (ii) $p_n(x)$ 中 x^n 的系数应有一預定的值(通常是 1); (iii) 对于已給的一个 x_0 値 (例如 $x_0=a$), $p_n(x_0)$ 应具有一个預定的值.

10-2. 逼近問題

設 L^2_w 为所有使 (Lebesgue) 積分

$$\int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx$$

存在且有限的函数 $f(x)$ 的类，并設 $\{\varphi_n(x)\}$ 为 L^2_w 中一个規格化正交系. 在用綫性組合

$$c_0\varphi_0(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)$$

向 L^2_w 中的任一函数 $f(x)$ 逼近中，我們把

$$(1)\quad I_n(c_h)=\int_a^b w(x)\,[f(x)-c_0\varphi_0(x)-\cdots-c_n\varphi_n(x)]^2\,dx$$

作为这一逼近的精确程度的度量．不难看出 c_h 的最好可能选擇是富里哀系数

(2) $a_h=(f,\varphi_h)$.

事实上，將(1)中的 $[\cdots]^2$ 展开，卽得

$$I_n(c_h)=\int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx+\sum_{h=0}^n c_h^2-2\sum_{h=0}^n a_h c_h$$
$$=\int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx-\sum_{h=0}^n a_h^2+\sum_{h=0}^n (c_h-a_h)^2,$$

也就是說最好近似値是 $f(x)$ 的富里哀級数(廣义的)

(3) $a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots$

的第 $(n+1)$ 个部分和，因此这一逼近的精确度量为

(4) $$I_n(a_h)=\int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx-\sum_{h=0}^n a_h^2.$$

由于 $I_n(a_h)\geqslant 0$，故知 Σa_h^2 是收斂的，并有貝塞尔不等式：

(5) $$\sum_{h=0}^\infty a_h^2\leqslant\int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx.$$

对于 L_w^2 中的每一函数 $f(x)$，有时成立巴塞凡耳公式

(6) $$\sum_{h=0}^\infty a_h^2=\int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx,$$

这时規格化正交系 $\{\varphi_n(x)\}$ 就称为在 L_w^2 中閉合．在这种情形下，当 $n\to\infty$ 时，顯然有

(7) $$\int_a^b w(x)\left[f(x)-\sum_{h=1}^n a_h\varphi_h(x)\right]^2 dx\to 0,$$

我們称富里哀級数(3)的部分和收斂于 $f(x)$．在 L_w^2 中，每一个閉合的正交系也是完全正交系，也就是說，如果对于所有的 h，有 $(f,\varphi_h)=0$，那么 $f(x)$ 几乎处处都等于零．这是 Riesz-Fischer 定理(參看 Kaczmarz 及 Steinhaus 1935 或 Tricomi, 1948, 3-3 節)的一个推論．

对于一个有限的区間 (a,b)，L_w^2 中的每一函数都可以由一連

續函数逼近到任意密切的程度，而根据韋尔司特拉斯定理，連續函数又可由一多項式來逼近．因此，对于一个有限的区間及 $\psi_n(x)=$ $=x^n$，或 $\varphi_n(x)=p_n(x)$，使 n 足夠大就可使 $I_n(a_h)$ 任意小．換句話說，有限区間上的任一正交多項式系都是閉的，但如区間 (a, b) 無限長，則就不再如此 (Szegö, 1939, 3-1 節)．

10-3．正交多項式的一般性質

区間 (a, b) 上的权函数 $w(x)$ 唯一地确定了正交多項式系 $\{p_n(x)\}$，每一多項式中还剩一常数因子．数

$$(1)\qquad c_n=\int_a^b w(x)\,x^n\,dx$$

称为权函数的矩，如以 $\psi_n(x)=x^n$，則有

$$(2)\qquad (\psi_m, \psi_n)=c_{m+n}.$$

因此，用 10-1 節的記法就有

$$(3)\qquad G_n=\begin{vmatrix} c_0, & c_1, & \cdots c_n \\ c_1, & c_2, & \cdots c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n, & c_{n+1} & \cdots c_{2n} \end{vmatrix},$$

$$\Psi_n=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{r>s}(x_r-x_s).$$

如以 k_n 表示 $p_n(x)$ 中 x^n 的系数(未定的)，則

$$(4)\qquad p_n(x)=\frac{k_n}{G_{n-1}}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \cdots c_n \\ c_1 & c_2 \cdots c_{n+1} \\ \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_n \cdots c_{2n-1} \\ 1 & x \cdots x^n \end{vmatrix},$$

(5) $$p_n(x)=\frac{k_n}{n!\,G_{n-1}}\int^{(n)}\prod_{r>s}(\xi_r-\xi_s)^2\prod_{\nu=1}^{n}[(x-\xi_\nu)w(\xi_\nu)\,d\xi_\nu].$$

因为 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 正交于 $p_n(x)$，故有

(6) $$h_n=(p_n, p_n)=k_n^2\frac{G_n}{G_{n-1}}.$$

对于规格化的多項式，$k_n=(G_{n-1}/G_n)^{1/2}$，但目前我們尙不須这样把多項式标准化.

任一 $m<n$ 次多項式是 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_m(x)$ 的綫性組合，因此与 $p_n(x)$ 正交. 这就可帮助我們証明下面的正交多項式零点的定理. $p_n(x)$的所有零点都是單零点，而且都位于区間(a,b)的内部. 因为，如 $p_n(x)$ 只在区間(a, b)上的 $m<n$ 个点上改变符号，那我們可構筑一 m 次多項式 $\pi_m(x)$，使在区間 (a, b) 上有 $p_n(x)\pi_m(x)\geqslant 0$，但这与 $(p_n, \pi_m)=0$ 矛盾. 我們还可以証明：在 $p_n(x)$ 的二相隣零点之間，有而且只有 $p_{n+1}(x)$ 的一个零点，而对于每一 $m>n$ 的 $p_m(x)$，則至少有一个零点(Szegö, 1939, 3-3節).

任意三个相隣多項式都可用一綫性关系來关联. 我們采用下面的記法：k_n 表示 $p_n(x)$ 中 x^n 的系数，k_n' 为 x^{n-1} 的系数；$r_n=$ $=k_n'/k_n$，且 $h_n=(p_n, p_n)$. 我們就是要証明下面的遞推公式

(7) $$p_{n+1}(x)=(A_nx+B_n)p_n(x)-C_np_{n-1}(x),\quad n=1,2,3,\cdots$$

其中

(8) $$A_n=k_{n+1}/k_n,\ B_n=A_n(r_{n+1}-r_n),$$
$$C_n=A_nh_n/(A_{n-1}h_{n-1})=k_{n+1}k_{n-1}h_n/(k_n^2h_{n-1}).$$

为了証明 (7)，注意，在 (8) 式所給的 A 值下，表达式 $p_{n+1}(x)-A_nxp_n(x)$ 是一个 n 次或低于 n 次的多項式，因此，其形式为

$$\gamma_0p_n(x)+\gamma_1p_{n-1}(x)+\cdots+\gamma_np_0(x).$$

由 $p_n(x)$ 的正交性質可知 $\gamma_2=\gamma_3=\cdots=\gamma_n=0$，且

$$-A_n(p_n, xp_{n-1})=\gamma_1(p_{n-1}, p_{n-1}).$$

但 $xp_{n-1}(x)-(k_{n-1}/k_n)p_n(x)$ 是一个 $n-1$ 次或低于 $n-1$ 次

的多項式，因此有

$$-A_n h_n k_{n-1}/k_n = \gamma_1 h_{n-1}$$

或 $\gamma_1 = C_n$. 最后，B_n 的值可从(7)式两边比較 x^n 的系数中得出．如令

(9)　$p_{-1}(x) = 0,$

則遞推关系 (7) 在 $n=0$ 时也正确．这一約定將在本章中通用．

反之，我們可以看出凡满足遞推关系 (7) 而 A_n 及 C_n 均为正数的多項式系是一正交系．

从公式 (7) 就容易得出下面的克列司托費尔-达布克司公式：

$$\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{-1} p_\nu(x)\, p_\nu(y) = \frac{k_n}{k_{n+1} h_n} \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)}{x-y}, \tag{10}$$

如 $y \to x$，則有

$$\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{-1} [p_\nu(x)]^2 = \frac{k_n}{k_{n+1} h_n} [p_n(x) p'_{n+1}(x) - p'_n(x) p_{n+1}(x)]. \tag{11}$$

設 $\{p_n(x)\}$ 为权函数 $w(x)$ 的正交多項式系，并設 $\rho(x)$ 为 (a, b) 上非負的 l 次多項式，并具有單零点在 $x_1, x_2, \cdots, x_l$. 則屬于权函数 $\rho(x)\, w(x)$ 的正交多項式 $q_n(x)$ 由如下的克列司托費耳公式給出：

$$c_n \rho(x)\, q_n(x) = \begin{vmatrix} p_n(x) & p_{n+1}(x) & \cdots & p_{n+l}(x) \\ p_n(x_1) & p_{n+1}(x_1) & \cdots & p_{n+l}(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n(x_l) & p_{n+1}(x_l) & \cdots & p_{n+l}(x_l) \end{vmatrix}, \tag{12}$$

其中 c_n 为任意常数因子 (Szegö, 1939, 2-5 節)．如 $\rho(x)$ 的零点中有些是重零点，則 (12) 式应用匯合型代替．

正交多項式具有几种重要的極値性質．其中第一个性質可从 10-2 節开头的結果中導出，并可寫为：

積分

$$\int_a^b |\pi_n(x)|^2 w(x)\, dx \tag{13}$$

中 $\pi_n(x)$ 代表任一 n 次多項式，其首項 x^n 变为極小的充要条件为 $\pi_n(x)=\varepsilon k_n^{-1} p_n(x)$，此处 ε 为一常数且 $|\varepsilon|=1$.

第二个性質包括多項式

$$(14)\qquad K_n(x,y)=\sum_{m=1}^{n} h_m^{-1} p_m(\bar{x})\, p_m(y),$$

这一式对复数 x, y 定义（$\bar{x}$ 为 x 的共軛复数）. 这里当注意：对于固定的 x_0, a 及 $x_0 \leqslant a$，多項式 $K_n(x_0, x)$ 是关于权函数 $(x-x_0)w(x)$ 正交的 [見(10)及(11)]. 我們这里所討論的極值性質可归納如下 (Szegö, 1939, 3–1–3 定理)：設 $\pi_n(x)$ 为一任意的 n 次多項式，具有复数系数可使積分 (13) 等于 1. 对于任一固定的 x_0（可能为复数），$|\pi_n(x_0)|^2$ 到达極大的充要条件为

$$\pi_n(x)=\varepsilon[K_n(x_0,x_0)]^{-1/2} K_n(x_0,x),$$

其中 $|\varepsilon|=1$，而極大值本身就是 $K_n(x_0,x_0)$.

10–4. 仪器積分

正交多項式的很多重要性質与它和內插問題及仪器積分的联系有关. 在这一節里，我們只能就某些基礎問題作一概略的敍述，詳細研究可参看 Szegö 的著作 (1939, 3–4 節，第 14, 15 章).

設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为区間 (a, b) 上的 n 个不同的点，并設

$$(1)\qquad \pi_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

$$l_\nu(x)=(x-x_\nu)^{-1}\pi_n(x)/\pi_n'(x_\nu), \qquad \nu=1,\cdots,n.$$

$l_\nu(x)$ 是函数 $f(x)$ 的拉格郎日內插式

$$(2)\qquad L(x)=\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\, l_\nu(x)$$

中与横标 $x_1, \cdots, x_n$ 相連帶的基礎多項式.

如現在要对一个在 x_ν 上的値为已知的函数計算積分

$$(3)\qquad I=\int_a^b w(x)\, f(x)\, dx,$$

那自然要应用公式 (2)，并計算

$$(4)\qquad J=\int_a^b w(x)\,L(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\int_a^b w(x)\,l_\nu(x)\,dx,$$

希望 J 將逼近于 I. 实際上，对于任一 $x_1,\cdots,x_n$，就 $\leqslant n-1$ 次的所有多項式 $f(x)$ 而言，都有 $I=J$. 不过，如选定 x_ν 为 $p_n(x)$ 的 n 个零点，且 n 次的正交多項式与权函数 $w(x)$ 相連帶，則对于所有的 $\leqslant 2n-1$ 次多項式 $f(x)$，有 $I=J$. 因为在这一情形下 $f(x)-L(x)$ 是一 $\leqslant 2n-1$ 次多項式，在 $p_n(x)$ 的所有零点上等于零，因此这一多項式的形式为 $p_n(x)\,\pi_{n-1}(x)$，这里的 $\pi_{n-1}(x)$ 为一 $\leqslant n-1$ 次多項式. 于是

$$I-J=\int_a^b w(x)\,[f(x)-L(x)]\,dx=(p_n,\,\pi_{n-1})=0.$$

習慣上常寫为

$$(5)\qquad J=\int_a^b w(x)\,L(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_{\nu n} f(x_\nu),$$

其中 $\lambda_{\nu n}$ 称为**克列司托費耳数**. 它与 $w(x)$ 的矩的关系为:

$$(6)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^h \lambda_{\nu n}=c_h \qquad\qquad h=0,1,\cdots,n-1.$$

这一关系是以 $f(x)=x^h$ 來導出的. 克列司托費耳数都是正数，且滿足下面的公式:

$$(7)\qquad \lambda_{\nu n}=\int_a^b \frac{w(x)\,p_n(x)}{p_n'(x_\nu)\,(x-x_\nu)}dx=\int_a^b w(x)\left[\frac{p_n(x)}{p_n'(x_\nu)(x-x_\nu)}\right]^2 dx,$$

$$(8)\qquad \lambda_{\nu n}=-\frac{k_{n+1}h_n/k_n}{p_n'(x_\nu)\;p_{n+1}(x_\nu)}=\frac{1}{K(x_\nu,\,x_\nu)}.$$

如以 $x_{1n},x_{2n},\cdots,x_{nn}$ 代表 $p_n(x)$ 的 n 个零点，以 $y_{1n},\cdots,y_{nn}$ 为区間 (a,b) 上的 n 个数，定义为

$$(9)\qquad \int_0^{y_{\nu n}} w(x)\,dx=\lambda_{1n}+\cdots+\lambda_{\nu n}=\Lambda_{\nu n},$$

則得若干**分离定理**

(10) $x_{\nu-1,n}<x_{\nu,n+1}<x_{\nu,n}$

(11) $y_{\nu-1,n}<y_{\nu,n+1}<y_{\nu,n}$

(12) $x_{\nu,n}<y_{\nu,n}<x_{\nu+1,n}$

(13) $\Lambda_{\nu-1,n}<\Lambda_{\nu,n+1}<\Lambda_{\nu,n}$.

10–5. 連分式

遞推公式 10–3 (7) 引出了連分式

(1) $$\frac{1|}{|A_0x+B_0}-\frac{C_1|}{|A_1x+B_1}-\frac{C_2|}{|A_2x+B_2}-\cdots$$

其中, A_n, B_n, C_n 見 10–3 (8). 我們把第 n 次收斂連分式 R_n/S_n 定义为 (1) 式中截至項 $A_{n-1}x+B_{n-1}$ 为止的有限分式,因此

(2) $$R_0=0,\ S_0=1;\ R_1=1,\ S_1=A_0x+B_0=p_1(x)/p_0(x).$$

R_n 和 S_n 都滿足下面的遞推关系:

(3) $$X_{n+1}=(A_nx+B_n)X_n-C_nX_{n-1}.$$

原始条件为:

(4) 对于 R_n: $X_0=0,\ X_1=1$; 对于 S_n: $X_0=1,\ X_1=p_1(x)/p_0(x)$.

由 10–3 (7) 式可知

(5) $$S_n=p_n(x)/p_0(x)=k_0^{-1}p_n(x).$$

为了同时表达 R_n, 引進連帶多項式:

(6) $$q_n(x)=\int_a^b\frac{p_n(x)-p_n(t)}{x-t}w(t)\,dt,$$

这是个 $n-1$ 次多項式. 从 10–3 (7) 式有

$$q_{n+1}(x)-(A_nx+B_n)q_n(x)+C_nq_{n-1}(x)$$
$$=-A_n\int_a^b p_n(t)\,w(t)\,dt=0,\qquad n=1,2,\cdots$$

此外,尚有 $q_0(x)=0$, $q_1(x)=\int_a^b k_1w(t)\,dt=k_1c_0$, 因此

(7) $$R_n=(k_1c_0)^{-1}q_n(x).$$

这样，就可看出 R_n/S_n 是 x 的有理函数，在 $x=x_{\nu n}$ 上具有單極．这些極点上的留数可从

$$\lim_{x\to x_{\nu n}}(x-x_\nu)\frac{q_n(x)}{p_n(x)}=\frac{1}{p_n'(x_\nu)}\int_a^b\frac{p_n(t)}{t-x_{\nu n}}w(t)\,dt=\lambda_{\nu n}$$

[見 10–4 (7)] 中算出，因此得部分分式为：

$$(8)\qquad \frac{R_n}{S_n}=\frac{k_0}{k_1c_0}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_{\nu n}}{x-x_{\nu n}}.$$

將和式展开为 x 的降冪式后，从关系式 10–4 (6) 可知前面 $2n$ 个系数是矩 c_h．因此在形式上可得

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{S_n}=\frac{k_0}{k_1c_0}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{c_h}{x^{h+1}}.$$

对于一个有限的区間 (a,b) 及对于沿着实軸上 (a,b) 綫段剖割的复数平面上的任一 x，馬科夫証明 R_n/S_n 存在且(9)式有效．此外，在这一情形下，有 (Szegö, 1939, 3–5 節)

$$(10)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{S_n}=\frac{k_0}{k_1c_0}\int_a^b\frac{w(t)}{x-t}dt.$$

無限長的区間的情形引起重大的困难，在矩問題的理論 (Stieltjes 及 Hamburger) 中有討論．可参看 Shohat 及 Tamarkin (1943).

10–6.　經典多項式

我們常常遇到的正交多項式及其所屬的区間和权函数列于下表，这些多項式称为**經典正交多項式**，將作較为詳細的研究．

經典正交多項式

a	b	$w(x)$	名　称
-1	1	1	勒让特或球多項式
-1	1	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$	盖根堡或特种球多項式
-1	1	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	雅可比或超比多項式
$-\infty$	∞	$\exp(-x^2)$	漢米特多項式
0	∞	$x^\alpha e^{-x}$	(廣义)拉甘尔多項式

所有这些多項式都具有許多公共的性質，其中最重要的三个性質是：

(i) $\{p'_n(x)\}$ 是一正交多項式系；

(ii) $p_n(x)$ 滿足如下形式的微分方程

$$A(x)y''+B(x)y'+\lambda_n y=0,$$

其中 $A(x)$ 及 $B(x)$ 不依賴于 n, λ_n 不依賴于 x;

(iii) 存在有一个推廣了的罗特列恰公式

$$p_n(x)=\frac{1}{K_n w(x)}\frac{d^n}{dx^n}[w(x)X^n], \tag{1}$$

其中 K_n 为一常数，X 为 x 的多項式，它的系数不依賴于 n.

反之，这三个性質中的任一个性質都是經典正交多項式的标誌，也就是說任何具有这些性質之一的正交多項式系都可以轉化为經典系．对于具有 (i) 性質的情形，曾由 Hahn(1935) 及 Krall (1936)加以証明；对于具有性質 (ii) 的情形，曾由 Bochner(1939) 証明(在这种情形下有若干例外)；而 (iii) 的情形則由 Tricomi (1948 a) 加以証明．現在我們將簡略地說明一下后一情形下的論断．

設 $\{p_n(x)\}$ 为多項式的一个序列，$p_n(x)$ 恰正是 n 次的多項式，对于这一多項式，在每一个 $n=0, 1, 2, \cdots$ 的情形下，(1) 式都成立，多項式 X 則是 k 次的．应当注意，我們这里并不需要假設 $p_n(x)$ 为正交多項式或 $w(x)$ 为权函数．从 (1)，取 $n=1$, 有

$$K_1 p_1(x)=X'+Xw'(x)/w(x). \tag{2}$$

先設 $k=0$. 則 X 是一常数而 w'/w 是 x 的綫性函数．利用自变数的綫性变换可令 $w'/w=-2x$, 因此 $w=\exp(-x^2)$, 多項式就是漢米特多項式，見 10-13(7)．其次令 $k=1$. 則 x 的綫性变换可將

$$\frac{w'(x)}{w(x)}=\frac{K_1 p_1(x)-X'}{X} \tag{3}$$

变換为 $w'/w=-1+\alpha/x$, 因此 $X=x$, $w=x^{\alpha}e^{-x}$, 于是得拉甘尔多項式,見 10-12 (5).

現在來討論 $k\geqslant 2$ 的情形. 此时可取

$$(4)\qquad X=\prod_{r=1}^{k}(x-a_r).$$

先設所有的 a_r 都互不相同. 从 (3)

$$\frac{w'(x)}{w(x)}=\sum_{r=1}^{k}\frac{a_r}{x-a_r},$$

因此 (1) 变为

$$p_n(x)=K_n\prod_{r=1}^{k}(x-a_r)^{-a_r}\frac{d^n}{dx^n}\left[\prod_{r=1}^{k}(x-a_r)^{n+a_r}\right],$$

如 $n=2$, 这不再是一二次多項式,除非 $k=2$. (4) 式中有重因子的情形可用同样的証明加以排除,因此在 (4) 式中必有 $k=2$, $a_1\neq a_2$. 利用 x 的綫性变換可使 $a_1=-1$, $a_2=1$, 幷設

$$X=(1-x)^2,\ w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.$$

因此这一情形就導出雅可比多項式,見 10-8 (10).

Hahn (1949) 曾將这些結果作了相当推廣. 他把微分算符 $df(x)/dx$ 換为更普遍的綫性算符

$$Lf(x)=\frac{f(qx+\omega)-f(x)}{(q-1)x+\omega},$$

幷証明在这一最普遍的情形下,条件 (i), (ii), (iii) 中的每一个,及二个其他条件中的每一个都标誌了同一族正交多項式. 經典多項式是 Hahn 多項式的極限情形, 22-25 節中的多項式也是如此.

10-7. 經典正交多項式的一般性質

經典正交多項式的很多重要性質,不难从廣义罗特列恰公式 10-6 (1) 中看出. 在拉甘尔情形下,設 $\alpha>-1$, 在雅可比情形下,設 $\alpha>-1$, $\beta>-1$.

在每一种情形下, 10-6(1)式中的 $w(x)$ 是一非負的幷在(a,b)

上可積的函数．不僅如此，因为 $w(x)X^n$ 的一直到 $n-1$ 階導数(包括該階導数在内)在 a 及 b 上等于零，因此可在

$$(f, p_n) = K_n^{-1}\int_a^b f(x)\,\frac{d^n}{dx^n}[w(x)X^n]\,dx$$

中作 n 次分部積分，得

$$(f, p_n) = (-1)^n K_n^{-1}\int_a^b f^{(n)}(x)\,w(x)\,X^n\,dx,$$

因此，如 f 为次数 $<n$ 的多項式，$(f, p_n)=0$．换句話說，多項式 10–6 (1) 組成区間 (a, b) 上的正交系，具有权函数 $w(x)$，对于这些函数，上節中的所有結果都有效．特別是，用 10–3 (8) 記法的遞推关系 10–3 (7) 也成立，我們在这一節中將仍用这种記法．

在从 10–6 (1) 導出微分方程的时候，我們以 D 表示 d/dx．从 10–6 (1) 及萊白尼茲積的導微公式可得

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = K_n[XD^2(wp_n)+(n+1)X'D(wp_n)$$
$$+\tfrac{1}{2}n(n+1)X''wp_n].$$

另一方面，应用 10–6 (3)，有

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = D^{n+1}\{[X_1p_1+(n-1)X']wX^n\}$$
$$= K_n\{[K_1p_1+(n-1)X']D(wp_n)$$
$$+(n+1)[K_1p_1'+(n-1)X'']wp_n\}$$

因为 $K_1p_1+(n-1)X'$ 至多不过是 x 的綫性函数．比較一下这二个結果，就可得下面的微分方程

$$(1)\qquad X\frac{d^2y}{dx^2}+K_1p_1(x)\frac{dy}{dx}+\lambda_n y=0,$$

其中 $y=p_n(x)$，且

$$(2)\qquad \lambda_n = -n[k_1K_1+\tfrac{1}{2}(n-1)X''].$$

微分方程的自伴形式为

$$(3)\qquad \frac{d}{dx}\left[Xw(x)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda_n w(x)\,y=0.$$

証明的細節見特列柯米 (1948 a, p. 210–212)．由于 X 至多不过

是一二次多項式，$p_1(x)$ 是一綫性多項式，故微分方程 (1) 可轉化为超比方程或是它的一个特殊情形或極限情形.

对于經典多項式，还有下面的微分公式：

(4) $$X\frac{dp_n(x)}{dx}=(\alpha_n+\tfrac{1}{2}nX''x)\,p_n(x)+\beta_n p_{n-1}(x),$$

其中

(5) $$\alpha_n=nX'(0)-\tfrac{1}{2}X''r_n,\ A_n\beta_n=-C_n[k_1K_1+(n-\tfrac{1}{2})X''],$$

A_n, C_n, k_n, r_n 的意义見 10-3 節. 利用 10-3(7) 式，可將 (4) 的右边用 p_n 及 p_{n+1} 來表示.

特列柯米著作 (1948 a, p. 212-215) 中証明 (4) 式的根据是：

$$Xp_n'(x)-\tfrac{1}{2}nX''xp_n(x)$$

是 $\leqslant n$ 次的多項式，因此具有如下形式

$$\alpha_n p_n(x)+\beta_n p_{n-1}(x)+\gamma_2 p_{n-2}(x)+\cdots+\gamma_n p_0(x).$$

于是系数 $\alpha_n, \cdots, \gamma_n$ 就可根据正交性質來确定. 在确定 β_n 的时候，也要用到微分方程 (3).

最后，像本章前头部分的情形一样，作連續 n 次分部積分，得

(6) $$h_n=(p_n, p_n)=(-1)^n k_n n!\,K_n^{-1}\int_a^b X^n w(x)\,dx,$$

从 10-4 (8), 10-3 (7) 及 (4)，得

(7) $$\begin{aligned}\lambda_{\nu,n}&=A_{n-1}h_{n-1}[X(x_{\nu,n})/\beta_n][p_{n-1}(x_{\nu,n})]^{-2}\\&=A_{n-1}h_{n-1}[\beta_n/X(x_{\nu,n})][p_n'(x_{\nu,n})]^{-2},\end{aligned}$$

又从 (6)，得

(8) $$(-1)^n k_n K_n>0.$$

下面六節中，每一節討論經典正交多項式主族之一. 六節中每一節是按下面的規划布置的：

(i) 多項式的标准化.

(ii) 計算下面的十个常数.

(9) $$h_n, k_n, r_n, A_n, B_n, C_n, K_n, \lambda_n, \alpha_n, \beta_n.$$

見于公式 10-7 (6), 10-3 (8), 10-7 (2), 10-7 (5).

(iii) 說明遞推关系,微分方程及其他关系式.

但在这些关系非常贅繁的时候,我們把这些关系及上節的一般公式中代入(9)式中十个常数值的工作,就留待学者來做.

(iv) 与超比型函数的关系及微分方程的全解.

(v) 母函数.

(vi) 積分表示式.

(vii) 加法定理,級数展开式及其他結果.

漸近性質,零点,展开問題等將在以后几節中討論.

我們采用下面的記法

(10)　$D=\frac{d}{dx}$,

并將令

(11)　$(\alpha_0)=1,\ (\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1).$

关于經典正交多項式的論述,可參看引言中所列的一些著作,及 Magnus 与 Oberhettinger (1948, 第 5 章)的著作.

10-8. 雅可比多項式

我們將用斯高的記法 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 表示經適当标准化的正交多項式,和它連帶的有

(1)　$a=-1,\ b=1,\ w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ X=1-x^2.$

为了使权函数非負而可積,应設

(2)　$\alpha>-1,\ \beta>-1.$

有很多形式关系沒有这一限制也是有效的.

(i) 标准化:

(3)　$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}.$

(ii) 常数

(4) $$(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)h_n=2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\times\Gamma(n+\beta+1).$$

(5) $$k_n=2^{-n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n},\quad r_n=\frac{n(\alpha-\beta)}{2n+\alpha+\beta}.$$

(6) $$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)A_n=(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2).$$

(7) $$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)B_n=(\alpha^2-\beta^2)(2n+\alpha+\beta+1).$$

(8) $$(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)C_n=(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2).$$

(9) $$K_n=(-2)^n n!,\quad \lambda_n=n(n+\alpha+\beta+1),\quad \alpha_n=r_n,\quad (2n+\alpha+\beta)\beta_n=2(n+\alpha)(n+\beta).$$

(iii) 罗特列恰公式

(10) $$2^n n!\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}D^n[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

遞推关系

(11) $$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)=(2n+\alpha+\beta+1)[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x+\alpha^2-\beta^2]\times P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)\times P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

从 (10) 可得

(12) $$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{-n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m}(x-1)^{n-m}(x+1)^m.$$

这說明

(13) $$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x).$$

微分方程:

(14) $$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+n(n+\alpha+\beta+1)y=0.$$

微分公式:

$$(15)\quad (2n+\alpha+\beta)(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$=n[(\alpha-\beta)-(2n+\alpha+\beta)x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$+2(n+\alpha)(n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

(iv) 超比函数.

方程(14)可以轉化为超比微分方程 2-1(1), 而雅可比多項式就是方程(14)的一个正則的解, 在 $x=1$ 处具有(3)式的值. 从 2-9 節公式可得

$$(16)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}F(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x)$$
$$=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}F(-n,n+\alpha+\beta+1;\beta+1;\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x)$$
$$=\binom{n+\alpha}{n}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x)^nF\left(-n,-n-\beta;\alpha+1;\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$=\binom{n+\beta}{n}(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2})^nF\left(-n,-n-\alpha;\beta+1;\frac{x+1}{x-1}\right).$$

从此可得另一微分公式:

$$(17)\quad 2^mD^mP_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(n+\alpha+\beta+1)_mP_{n-m}^{(\alpha+m,\beta+m)}(x)$$
$$m=1,2,\cdots,n.$$

这驗証了 10-6 節的 (i).

从 2-9 (14) 可知函数 $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 定义为

$$(18)\quad \Gamma(2n+\alpha+\beta+2)Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{2^{n+\alpha+\beta}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(x-1)^{n+\alpha+1}(x+1)^{\beta}}$$
$$\times F[n+1,n+\alpha+1;2n+\alpha+\beta+2;2(1-x)^{-1}],$$

它是方程 (14) 的第二个解, 称为第二类雅可比函数. 这一函数不是多項式, 但它和雅可比多項式满足同一遞推公式 (11) 及微分公式 (15) (除了 $n=0$ 对 Q 不適合); 当 $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>-n-1$ 时, 它在無窮远处等于零. (18)中超比級数的各种变換及其解析开拓

见 2-1-4 節.

雅可比多項式及第二类雅可比函数之間有几个关系式. 从超比方程各种解之間的关系(见 2-9 節)可知

(19) $$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=-\tfrac{1}{2}\pi\csc(\alpha\pi)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+2^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\times F(n+1,-n-\alpha-\beta;1-\alpha;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x).$$

还有積分关系:

(20) $$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\tfrac{1}{2}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\int_{-1}^{1}(x-t)^{-1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\,dt,$$

这一式对沿着綫段 $(-1,1)$ 剖割的复数平面上的所有 x 都正确. 綫段 $(-1,1)$ 是一分枝切割, $Q_n^{(\alpha,\beta)}$ 根据 x 是由上半平面 $(\xi+i0)$ 或下半平面 $(\xi-i0)$ 趋向于分枝切割上的一点 ξ 而有不同的值. $Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi\pm i0)$ 的值可从(19)式算出, 如 $x=\xi+i0$, 則取 $\arg(x-1)=\pi$, 如 $x=\xi-i0$, 則取 $\arg(x-1)=-\pi$. 特別是

(21) $$Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi+i0)-Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi-i0)=-i\,2^{\alpha+\beta}\sin(\alpha\pi)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}(1-\xi)^{-\alpha}(1+\xi)^{-\beta}\times F(n+1,-n-\alpha-\beta;1-\alpha;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\xi),\quad -1<\xi<1.$$

在剖割本身上, 可用如下的函数

(22) $$\mathrm{Q}_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)=\tfrac{1}{2}[Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi+i0)+Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi-i0)],\quad -1<\xi<1,$$

这一函数在 α 及 β 是实数时也是实数. 从(19)式有

(23) $$\mathrm{Q}_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)=-\tfrac{1}{2}\pi\csc(\alpha\pi)P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)+2^{\alpha+\beta-1}\cos(\alpha\pi)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}(1-\xi)^{-\alpha}(1+\xi)^{-\beta}\times F(n+1,-n-\alpha-\beta;1-\alpha;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\xi),\quad -1<\xi<1.$$

第二类雅可比函数也与下面的多項式关联:

$$(24)\quad q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\int_{-1}^{1}(t-x)^{-1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}[P_n^{(\alpha,\beta)}(t)-P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]\,dt,$$

它是依 10-5 (6) 式与雅可比多項式連帶的,因为 (20) 式可重寫为

$$(25)\quad Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=-\tfrac{1}{2}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}q_n^{(\alpha,\beta)}(x)+Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

另外一些联接 P 及 Q 的关系式为

$$(26)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)-P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\,Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{\alpha+\beta-1}(2n+\alpha+\beta)\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta},$$

$$(27)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{d}{dx}Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)-Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=-2^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}(x-1)^{-\alpha-1}(x+1)^{-\beta-1},$$

从这些公式可知 $Q_n^{(\alpha,\beta)}$ 与 $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 满足同一个微分方程 (15).

有人从超比函数的理論中得出了 $Q_n^{(\alpha,\beta)}$ 的積分表示式,其中最簡單的为:

$$(28)\quad Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{-n-1}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\times\int_{-1}^{1}(x-t)^{-n-1}(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}\,dt,$$

上式在 x 位于沿 $(-1,1)$ 綫段剖割的复平面上时正确.

(v) 母函数

$$(29)\quad \sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)z^n=2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-z+R)^{-\alpha}(1+z+R)^{-\beta},\qquad |z|<1,$$

其中

$$(30)\quad R=(1-2xz+z^2)^{\frac{1}{2}},$$

且当 $z=0$ 时, $R=1$. (29)式的几种証明方法,見 Szegö(1939, 4-4

節). 对于 α, β 的特殊值,另外还有几个母函数.

(vi) 積分表示式

从罗特列恰公式 (10), 有

$$(31)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(x+)}\left(\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t-x}\right)^n\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^\alpha\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^\beta dt$$

其中 $x\neq\pm1$, 積分圍道为一單閉圍綫,在正方向內圍繞 $t=x$. 点 $t=\pm1$ 位于圍道的外面, 在 $t=x$ 时, $[(1-t)/(1-x)]^\alpha$ 及 $[(1+t)/(1+x)]^\beta$ 应作为 1.

其他積分表示式可用公式 (16) 从積分表示的超比函数中得出.

(vii) 其他結果

我們可以对 $w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\rho(x)=(1-x)$ 应用克列司托費耳公式 10-3 (12). 根据 (3) 式得

$$(32)\quad (n+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+1)(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)$$
$$=(n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

同理有

$$(33)\quad (n+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+1)(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)$$
$$=(n+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

这些公式就是隣接超比函数之間关系的例子 [見 2-8 (31) 至 2-8 (45)]; 屬于这种性質的其他关系式为

$$(34)\quad (1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)+(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)=2P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

$$(35)\quad (2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x)$$
$$=(n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

$$(36)\quad (2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x)$$
$$=(n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+(n+\alpha)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

$$(37)\quad P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x)-P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x)=P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

重复应用这些公式卽可得出以 $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ 表示的 $P_n^{(\alpha+h,\beta+k)}(x)$ 的表达式,此处 h, k 为任意整数.

从罗特列恰公式 (10) 可得

$$(38)\quad 2n\int_0^x (1-y)^\alpha(1+y)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(y)\,dy$$
$$=P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(0)-(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

Toscano (1949) 求得了罗特列恰公式的类似公式，以有限差分表示．我們把差分算符定义为:

$$(39)\quad \Delta_\alpha F(\alpha)=F(\alpha+1)-F(\alpha),\quad \Delta_\alpha^n F=\Delta_\alpha(\Delta_\alpha^{n-1}F),$$

并將 Toscano 的結果寫成

$$(40)\quad n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$=\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+n+1)}{(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x)^{\alpha+1}}\Delta_\alpha^n\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x)^{\alpha+1}\right].$$

最后，我們举出一个重要的極限式:

$$(41)\quad \lim_{n\to\infty}\left[n^{-\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\frac{z}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n^{-\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)\right]$$
$$=(\tfrac{1}{2}z)^{-\alpha}J_\alpha(z),$$

这里的 J_α 是第一类貝塞尔函数．这一公式对于任意的 α 及 β，一致位于复数 z 平面的任一有界域中者都成立．

10-9. 盖根堡多項式

我們采用盖根堡的記法 $C_n^\lambda(x)$ 表示經適当标准化的多項式，和它相連帶的有

$$(1)\quad a=-1,\ b=1,\ w(x)=(1-x^2)^{\lambda-1/2},\ X=1-x^2.$$

这种多項式又称为特种球多項式，常記为 $P_n^{(\lambda)}(x)$．很明顯可以看出，盖根堡多項式是雅可比多項式的常数倍数，其中 $\alpha=\beta=\lambda-\tfrac{1}{2}$．为了求得一个实数可積的权函数，設

$$(2)\quad \lambda>-\tfrac{1}{2},$$

不过，有很多形式关系并不受这一限制．这些多項式还可参看 3-15 節．

(i) 标准化

(3) $$C_n^\lambda(1)=\binom{n+2\lambda-1}{n}=\frac{(2\lambda)_n}{n!}.$$

与 10-8 (3) 比較一下，可知

(4) $$(\lambda+\tfrac{1}{2})_n C_n^\lambda(x)=(2\lambda)_n P_n^{(\alpha,\alpha)}(x),\qquad \alpha=\lambda-\tfrac{1}{2}.$$

如 2λ 等于零或等于一負整数，則标准化公式 (3) 不成立．在 (2) 的范圍內，唯一的例外就是 $\lambda=0$，在这种情形下，我們將根据

(5) $$C_0^0(1)=1,\ C_n^0(1)=\frac{2}{n}\qquad n=1,2,\cdots$$

來進行标准化，并有

(6) $$C_n^0(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}C_n^\lambda(x)=2\,\frac{(n-1)!}{(\tfrac{1}{2})_n}\,P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x).$$

在这一節的很多公式中，$\lambda=0$ 的情形应除外，而 $\lambda=0$ 的情形則在 10-10 節中討論．

(ii) 常数

(7) $$(n+\lambda)n!\,\Gamma(\lambda)h_n=\pi^{\frac{1}{2}}(2\lambda)_n\Gamma(\lambda+\tfrac{1}{2}).$$

(8) $$n!\,k_n=2^n(\lambda)_n,\ r_n=0,\ (2\lambda)_nK_n=(-2)^n(\lambda+\tfrac{1}{2})_n.$$

(9) $$(n+1)A_n=2(n+\lambda),\ B_n=0,\ (n+1)C_n=n+2\lambda-1.$$

(10) $$\lambda_n=n(n+2\lambda),\ \alpha_n=0,\ \beta_n=n+2\lambda-1.$$

(iii) 罗特列恰公式

(11) $$2^n n!\,(\lambda+\tfrac{1}{2})_n(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_n^\lambda(x)=(-1)^n(2\lambda)_nD^n[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}].$$

(12) $$C_0^\lambda(x)=1,\ C_1^\lambda(x)=2\lambda x.$$

遞推公式

(13) $$(n+1)C_{n+1}^\lambda(x)=2(n+\lambda)xC_n^\lambda(x)-(n+2\lambda-1)C_{n-1}^\lambda(x).$$

微分方程

(14) $$(1-x^2)y''-(2\lambda+1)xy'+n(n+2\lambda)y=0.$$

微分公式

$$(15)\quad (1-x^2)\frac{d}{dx}C_n^\lambda(x)=-nxC_n^\lambda(x)+(n+2\lambda-1)C_{n-1}^\lambda(x)$$

$$=(n+2\lambda)xC_n^\lambda(x)-(n+1)C_{n+1}^\lambda(x).$$

字称

$$(16)\quad C_n^\lambda(-x)=(-1)^nC_n^\lambda(x).$$

顯表示式

$$(17)\quad C_n^\lambda(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(\lambda)_m(\lambda)_{n-m}}{m!\,(n-m)!}\cos(n-2m)\theta.$$

$$(18)\quad C_n^\lambda(x)=\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^m(\lambda)_{n-m}}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m}.$$

$$(19)\quad C_n^\lambda(0)=\begin{cases}0 & \text{如 } n \text{ 为奇数}\\ (-1)^m(\lambda)_m/m! & \text{如 } n=2m \text{ 为偶数}\end{cases}$$

(iv) 超比函数

微分方程(14)可簡化为超比方程，$C_n^\lambda(x)$就是在 $x=1$ 处正則的解，并在該处具有 (3) 的値．而且在蓋根堡多項式的情形下，超比級数取二次变換，見 2-1-5 節，因此可得下面的表示式：

$$(20)\quad n!\,C_n^\lambda(x)=(2\lambda)_nF(-n,\ n+2\lambda;\ \lambda+1/2;\ 1/2-1/2\,x)$$

$$=(-1)^n(2\lambda)_nF(-n,\ n+2\lambda;\ \lambda+1/2;\ 1/2+1/2\,x)$$

$$=2^n(\lambda)_n(x-1)^nF\left(-n,\ -n-\lambda+\frac{1}{2};\ -2n-2\lambda+1;\ \frac{2}{1-x}\right)$$

$$=(2\lambda)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^nF\left(-n,\ -n-\lambda+\frac{1}{2};\ \lambda+\frac{1}{2};\ \frac{x-1}{x+1}\right).$$

$$(21)\quad C_{2m}^\lambda(x)=(-1)^m\frac{(\lambda)_n}{m!}F(-m,\ m+\lambda;\ 1/2;\ x^2)$$

$$=\frac{(2\lambda)_{2m}}{(2m)!}F(-m,\ m+\lambda;\ \lambda+1/2;\ 1-x^2)$$

$$=\frac{(\lambda)_m}{(1/2)_m}P_m^{(\lambda-1/2,\,-1/2)}(2x^2-1).$$

$$(22)\quad C^{\lambda}_{2m+1}(x)=(-1)^m\frac{(\lambda)_{m+1}}{m!}2xF\left(-m,\ m+\lambda+1;\ \frac{3}{2};\ x^2\right)$$

$$=\frac{(2\lambda)_{2m+1}}{(2m+1)!}xF\left(-m,\ m+\lambda+1;\ \lambda+\frac{1}{2};\ 1-x^2\right)$$

$$=\frac{(\lambda)_{m+1}}{(1/2)_{m+1}}xP_m^{(\lambda-1/2,\,1/2)}(2x^2-1).$$

从这些表示式及 (13), (19) 式可得

$$(23)\quad D^mC^{\lambda}_n(x)=2^m(\lambda)_mC^{\lambda+m}_{n-m}(x),\qquad m=1,2,\cdots,n.$$

$$(24)\quad DC^{\lambda}_{n-1}(x)=xDC^{\lambda}_n(x)-nC^{\lambda}_n(x).$$

$$(25)\quad DC^{\lambda}_{n+1}(x)=xDC^{\lambda}_n(x)+(n+2\lambda)C^{\lambda}_n(x).$$

$$(26)\quad 2(n+\lambda)\int C^{\lambda}_n(x)\,dx=C^{\lambda}_{n+1}(x)-C^{\lambda}_{n-1}(x).$$

$$(27)\quad DC^{\lambda}_n(0)=\begin{cases}0 & \text{如 } n \text{ 为偶数}\\ 2(-1)^m(\lambda)_{m+1}/m! & \text{如 } n=2m+1 \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

微分方程 (14) 的第二个解可从 10-8 (iv) 的結果中应用盖根堡与雅可比多項式間的关系 (4), (6), (21) 或 (22) 式得出. 在这种情形下,似尙不存在有一般的記法或标准式.

(v) 母函数

从 10-8 (29), 可得

$$(28)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda+1/2)_n}{(2\lambda)_n}C^{\lambda}_n(x)z^n=2^{\lambda-1/2}R^{-1}(1-xz+R)^{1/2-\lambda},$$

$$|z|<1,\ R=(1-2xz+z^2)^{1/2},\ \text{在 } z=0 \text{ 时 } R=1;$$

但这时有一較簡單的母函数,即

$$(29)\quad \sum_{n=0}^{\infty}C^{\lambda}_n(x)z^n=(1-2xz+z^2)^{-\lambda},\qquad |z|<1,$$

令 $x=\cos\theta$, 將右边分解为 $(1-e^{i\theta}z)^{-\lambda}(1-e^{-i\theta}z)^{-\lambda}$, 展开为二項式級数并应用(17)即可得到上式的証明. 第三个母函数为

$$(30)\quad \sum_{n=0}^{\infty}C^{\lambda}_n(x)\frac{z^n}{(2\lambda)_n}=\Gamma(\lambda+1/2)e^{z\cos\theta}(1/2z\sin\theta)^{1/2-\lambda}J_{\lambda-1/2}(z\sin\theta)$$

这一式可用拉普拉斯变換与(29)式相联.

(vi) 積分表示式

每一个母函数都可引出盖根堡多項式的圍道積分表示式. 此外,我們有下面的实積分

(31) $$C_n^\lambda(x)=\frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda+n)}{n!\,[\Gamma(\lambda)]^2}\int_0^\pi[x+(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^n(\sin\varphi)^{2\lambda-1}d\varphi,$$

(32) $$C_n^\lambda(\cos\theta)=\frac{2^\lambda\Gamma(\lambda+1/2)(2\lambda)_n}{\pi^{1/2}\,n!\,\Gamma(\lambda)}(\sin\theta)^{1-2\lambda}\int_0^\theta\frac{\cos(n+\lambda)\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1-\lambda}}d\varphi,$$

这二式中, $\lambda>0$. (31)式見 3-15 (22)及 Seidel–Szász (1950). 方程(32)是米勒積分 3-15 (23); 以 $\pi-\phi$ 代 ϕ, $\pi-\theta$ 代 θ 可得另一積分式. 米勒積分提供了一个函数变换关系,可將特种球多項式变换为幂多項式.

(vii) 各种結果

从它与勒上特函数的关系

(33) $$n!\,C_n^\lambda(x)=\Gamma(\lambda+1/2)(2\lambda)_n[1/4(x^2-1)]^{1/4-1/2\lambda}P^{1/2-\lambda}_{n+\lambda-1/2}(x),$$

可得加法定理

(34) $$C_n^\lambda(\cos\theta\cos\psi+\sin\theta\sin\psi\cos\varphi)$$
$$=\sum_{m=0}^n 2^m(2\lambda+2m-1)(n-m)!\,\frac{[(\lambda)_m]^2}{(2\lambda-1)_{n+m+1}}$$
$$\times(\sin\theta)^m C_{n-m}^{\lambda+m}(\cos\theta)(\sin\psi)^m C_{n-m}^{\lambda+m}(\cos\psi)C_m^{\lambda-1/2}(\cos\varphi).$$

隣接超比函数之間的关系有

(35) $$2\lambda(1-x^2)C_{n-1}^{\lambda+1}(x)=(2\lambda+n-1)C_{n-1}^\lambda(x)-nxC_n^\lambda(x)$$
$$=(n+2\lambda)xC_n^\lambda(x)-(n+1)C_{n+1}^\lambda(x).$$

(36) $$(n+\lambda)C_{n+1}^{\lambda-1}(x)=(\lambda-1)[C_{n+1}^\lambda(x)-C_{n-1}^\lambda(x)].$$

从公式(11), 以及从(21)和(22)中超比級数的綫性变换中可得微分公式

(37) $$(x^2-1)^{\lambda+1/2n}D^n[(x^2-1)^{-\lambda}]=(-1)^n n!\,C_n^\lambda[x(x^2-1)^{-1/2}].$$

上式是特列柯米(1949)所導出. 这里我們再提出一个盖根堡積分式

(38) $$n!\int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta} C_n^{\lambda}(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\lambda}d\theta$$
$$=2^{\lambda}\pi^{1/2}\Gamma(\lambda+1/2)(2\lambda)_n i^n z^{-\lambda}J_{\lambda+n}(z)$$

及三角級数展开式

(39) $$\Gamma(\lambda)C_n^{\lambda}(\cos\theta)$$
$$=2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_m}{m!}\frac{\Gamma(n+m+2\lambda)}{\Gamma(n+m+\lambda+1)}\cos[(n+2m+2\lambda)\theta-\lambda\pi],$$
$$0<\lambda<1,\ 0<\theta<\pi.$$

(見 Szegö, 1939, p. 95).

10-10. 勒上特多項式

勒上特多項式 $P_n(x)$ 是經適当标准化的多項式，与它相連的

(1) $$a=-1,\ b=1,\ w(x)=1,\ X=1-x^2.$$

这些多項式又叫球面多項式．实际上，它就是 $\alpha=\beta=0$ 的雅可比多項式，也是 $\lambda=1/2$ 的蓋根堡多項式．勒上特多項式，及更一般的勒上特函数在前面已經詳細討論过(見第三章)．

(i) 标准化

(2) $$P_n(1)=1.$$

因此

(3) $$P_n(x)=C_n^{1/2}(x)=P_n^{(0,0)}(x).$$

(ii) 常数

(4) $$h_n=(n+1/2)^{-1},\ k_n=2^n g_n=2^n\frac{(1/2)_n}{n!},\ r_n=0.$$

(5) $$K_n=(-2)^n n!,\ (n+1)A_n=2n+1,$$
$$B_n=0,\ (n+1)C_n=-n.$$

(6) $$\lambda_n=n(n+1),\ \alpha_n=0,\ \beta_n=n.$$

(iii) 罗特列恰公式

(7) $$2^n n!\,P_n(x)=D^n[(x^2-1)^n].$$

(8) $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}.$

遞推公式

(9) $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x).$

克列司托费尔-达布克司公式

(10) $$\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m(x)P_m(y)$$
$$=\frac{n+1}{x-y}[P_{n+1}(x)\,P_n(y)-P_n(x)\,P_{n+1}(y)].$$

微分方程

(11) $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0.$

微分及積分公式

(12) $$(1-x^2)P_n'(x)=n[P_{n-1}(x)-xP_n(x)]$$
$$=(n+1)[xP_n(x)-P_{n+1}(x)].$$

(13) $xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)=nP_n(x).$

(14) $P_{n+1}'(x)-xP_n'(x)=(n+1)P_n(x).$

(15) $(2n+1)\int P_n(x)\,dx=P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x).$

在这些公式中，$P_n'(x)=d\,P_n(x)/dx.$

顯表示式,字称,特殊値:

(16) $$P_n(x)=2^{-n}\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\binom{n}{m}\binom{2n-2m}{n}x^{n-2m}.$$

(17) $$P_n(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{n}g_m g_{n-m}\cos(n-2m)\theta.$$

(18) $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x),\ P_n(\pm 1)=(\pm 1)^n.$

(19) $P_{2m}(0)=(-1)^m g_m,\ P_{2m+1}(0)=0.$

(20) $P_{2m}'(0)=0,\ P_{(2m+1)}'(0)=(-1)^m(2m+1)g_m.$

此处

(21) $$g_m=\frac{(1/2)_m}{m!}=2^{-2m}\binom{2m}{m}.$$

(iv) 超比函数，又見 10-9 (iv).

(22) $P_n(x)=F(-n, n+1; 1; \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x)$
$=2^n g_n x^n F(-\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n; \tfrac{1}{2}; x^{-2})$.

(23) $P_n(\cos\theta)=F(-n, n+1; 1; \sin^2\tfrac{1}{2}\theta)$
$=(-1)^n F(-n, n+1; 1; \cos^2\tfrac{1}{2}\theta)$.

(24) $P_{2m}(x)=(-1)^m g_m F(-m, m+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}; x^2)$.

(25) $P_{2m+1}(x)=(-1)^m(2m+1)g_m x F\left(-m, m+\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)$.

(26) $\dfrac{d^m}{dx^m}P_n(x)=2^m m!\, g_m C_{n-m}^{m+1/2}(x)$　　$n\geqslant m$.

有关勒上特微分方程 (11) 的第二个解的情形可从 10-8 (iv) 中得出．这一第二个解就是第二类勒上特函数：

(27) $Q_n(x)=Q_n^{(0,0)}(x)$.

在沿着 $(-1, 1)$ 綫段剖割的复数平面上

(28) $2^{-n}(2n+1)!\,(n!)^{-2}Q_n(x)$
$=(x-1)^{-n-1}F[n+1, n+1; 2n+2; 2(1-x)^{-1}]$
$=(x+1)^{-n-1}F[n+1, n+1; 2n+2; 2(1+x)^{-1}]$
$=x^{-n-1}F(\tfrac{1}{2}+n/2, 1+n/2; \tfrac{3}{2}+n; x^{-2})$.

第二类勒上特函数不是一个多項式；它和勒上特多項式滿足同一个遞推关系 (9) 及同样的微分公式 (12)-(15)．但在 Q 的情形下，这些公式中，$n=0$ 不適宜．

(29) $Q_n(-x)=(-1)^{n+1}Q_n(x)$.

(30) $Q_0(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$, $Q_1(x)=\dfrac{1}{2}x\ln\dfrac{x+1}{x-1}-1$.

(31) $Q_n(x)=2^{-n-1}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(x-t)^{-n-1}\,dt$.

(32) $Q_n(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}[x+(x^2-1)^{1/2}\operatorname{ch}t]^{-n-1}\,dt$.

(33) $Q_n(\operatorname{ch}\zeta)=\int_\zeta^\infty[2(\operatorname{ch}z-\operatorname{ch}\zeta)]^{-1/2}e^{-(n+1/2)z}dz,$

$$\operatorname{Re}z\geqslant\operatorname{Re}\zeta,\ \operatorname{Im}z=\operatorname{Im}\zeta.$$

(34) $Q_n(x)=1/2\int_{-1}^{1}(x-t)^{-1}P_n(t)\,dt.$

(35) $Q_n(x)=Q_0(x)P_n(x)-\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x).$

最后一式与 10-8(25) 在 $\alpha=\beta=0$ 的特殊情况下的結果一样；(35) 型的証明，見 Hobson (1931, p. 53–54)．無窮远点是 $Q_n(x)$ 的 $n+1$ 階零点；这一函数在 x 剖面上不再有其他零点．

实軸由 -1 至 1 的一段是 $Q_n(x)$ 的一分枝切割，且

(36) $Q_n(\xi+i0)-Q_n(\xi-i0)=-\pi iP_n(\xi)\qquad -1<\xi<1.$

我們可以在分枝切割上用下式定义勒上特方程的第二个解，即

(37) $\mathrm{Q}_n(\xi)=1/2\,Q_n(\xi+i0)+1/2\,Q_n(\xi-i0)\qquad -1<\xi<1.$

于是有

(38) $\mathrm{Q}_n(\xi)=1/2\,⨍_{-1}^{1}(\xi-t)^{-1}P_n(t)\,dt\qquad -1<\xi<1,$

式中的積分是柯西主値，即当 $\varepsilon>0,\ \varepsilon\to0$ 时的

$$\lim\left(\int_{-1}^{\xi-\varepsilon}+\int_{\xi+\varepsilon}^{1}\right).$$

(v) **母函数**

(39) $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=(1-2xz+z^2)^{-1/2}\qquad -1<x<1,\ |z|<1.$

(40) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}P_n(\cos\theta)z^n=e^{z\cos\theta}J_0(z\sin\theta).$

(41) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1/2}P_n(\cos\theta)\,x^{2n+1}=F(\sin 1/2\,\theta,\varphi)$

$$x=\tan 1/2\,\varphi,\ 0<\varphi<1/2\,\pi,\ 0<\theta<\pi.$$

前面二个公式是 10-9 (29) 及 10-9 (30) 的特例．最后一式可从

(39) 式中推出，$F(k,\varphi)$ 为勒上特第一类不完全橢圓積分，k 是它的模.

(vi) 積分表示式

$$(42)\quad P_n(\cos\theta)=\pi^{-1}\int_0^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^n\,d\varphi$$

$$=\pi^{-1}\int_0^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^{-n-1}\,d\varphi.$$

$$(43)\quad P_n(\cos\theta)=2^{1/2}\pi^{-1}\int_0^{\theta}(\cos\varphi-\cos\theta)^{-1/2}\cos(n+1/2)\,\varphi\,d\varphi \qquad 0<\theta<\pi.$$

$$(44)\quad P_n(x)=(2\pi i)^{-1}\int^{(0+)}(1-2xz+z^2)^{-1/2}z^{-n-1}\,dz.$$

$$(45)\quad P_n(x)=(-2)^{-n}(2\pi i)^{-1}\int^{(x+)}(1-z^2)^n(z-x)^{-n-1}\,dz.$$

方程 (44) 从 (39) 式推出，方程 (45) 从罗特列恰公式導來. (45) 式中的積分称为 Schläfli 積分. (42) 式是拉普拉斯第一及第二積分式，可从 (45) 式導出，此时的積分圍道应取定为圓

$$z=x+(x^2-1)^{1/2}e^{i\varphi} \qquad -\pi<\varphi<\pi.$$

(43) 式是米勒積分，可从拉普拉斯積分中導出 (Whittaker and Watson, 1940, 15-23 及 15-23-1 節).

(vii) 各种結果

对于第一类連帶勒上特函数 [見 3-4 (1) 及 3-15 (4)]，用記法

$$(46)\quad P_n^m(\cos\theta)=(-2)^m m!\,g_m(\sin\theta)^m C_{n-m}^{m+1/2}(\cos\theta),$$

从 10-9 (34) 式可得勒上特多項式加法定理

$$(47)\quad P_n(\cos\theta\cos\psi+\sin\theta\sin\psi\cos\varphi)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\psi)$$

$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\psi)\cos n\varphi.$$

下面我們提出一个三角級数展开式

(48) $$P_{n-1}(\cos\theta)=\frac{2}{\pi n g_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n)_m g_m}{(n+1/2)_m}\sin[(n+2m)\theta],$$

$$n=2,3,\cdots$$

及積分公式

(49) $$\int_{-1}^{1}(1-x)^{-1/2}P_n(x)\,dx=\frac{2^{3/2}}{2n+1}.$$

(50) $$\int_0^{\pi}P_{2m}(\cos\theta)\,d\theta=\pi g_m^2,$$

$$\int_0^{\pi}P_{2m+1}(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta=\pi g_m g_{m+1}.$$

(51) $$\int_0^1 x^{\lambda}P_{2m}(x)\,dx=\frac{(-1)^m(-1/2\lambda)_m}{2(1/2+1/2\lambda)_{m+1}},\qquad \mathrm{Re}\,\lambda>-1.$$

(52) $$\int_0^1 x^{\lambda}P_{2m+1}(x)\,dx=\frac{(-1)^m(1/2-1/2\lambda)_m}{2(1+1/2\lambda)_{m+1}},\qquad \mathrm{Re}\,\lambda>-2.$$

及双綫性展开式

(53) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n(x)P_n(y)=2\ln 2-1-\ln[(1-x)(1+y)]$$

$$-1<x\leqslant y<1.$$

10-11. 車比雪夫多項式

有时(主要在法國文献上),一般的正交多項式常称为車比雪夫多項式. 另外在正交多項式中也有几种特殊系統,叫做車比雪夫多項式. 在这一章中,我們用第一类及第二类車比雪夫多項式來称適当标准化的正交多項式,与它們相連帶的

(1) $$a=-1,\ b=1,\ w(x)=(1-x^2)^{\mp 1/2},\ X=1-x^2.$$

很明顯,这些多項式中,第一类 $T_n(x)$ 是 $\alpha=\beta=-1/2$ 的雅可比多項式的倍数,而第二类 $U_n(x)$ 則是 $\alpha=\beta=1/2$ 的雅可比多項式的倍数. 又,这里所說的雅可比多項式,对 $T_n(x)$ 來說是 $\lambda=0$ 的特种球多項式,而对 $U_n(x)$ 來說,則是 $\lambda=1$ 的特种球多項式.

第一类車比雪夫多項式的正交关系是

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,T_m(x)\,(1-x^2)^{-1/2}\,dx=0, \qquad m\neq n.$$

如以 $x=\cos\theta$ 代換,并注意 $\cos n\theta$ 恰巧是 $\cos\theta$ 的 n 次多項式,就可看出 $T_n(x)$ 应当是 $\cos n\theta$ 的常数倍数;同理可証 $U_n(x)$ 是 $\csc\theta\sin(n+1)\theta$ 的常数倍数. 令

$$(2)\qquad T_n(\cos\theta)=\cos n\theta,\ U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

可將所論多項式标准化. 包含車比雪夫多項式的許多恆等式都是熟知的三角恆等式的衍生. 作为一个例子,我們提出下面二个説明二类車比雪夫多項式的关系式:

$$(3)\qquad T_n(x)=U_n(x)-xU_{n-1}(x).$$

$$(4)\qquad (1-x^2)U_{n-1}(x)=xT_n(x)-T_{n+1}(x).$$

車比雪夫多項式是 $\lambda=0, 1$ 的特种球多項式. 从 10-9 (23) 可知 C_n^λ 可表达为車比雪夫多項式的導数,只要 λ 是一正整数.

(i) 标准化

見公式 (2). 由此可知

$$(5)\qquad T_n(x)=\tfrac{1}{2}nC_n^0(x)=(g_n)^{-1}P_n^{(-1/2,-1/2)}(x), \qquad n=1, 2, \cdots$$

$$(6)\qquad U_n(x)=C_n^1(x)=(2g_{n+1})^{-1}P_n^{(1/2,1/2)}(x), \qquad n=0, 1, \cdots$$

这里的 C_n^0 見 10-9 (6), g_n 見 10-10 (21).

(ii) 常数

对于 $T_n(x)$

$$(7)\qquad h_0=\pi,\ h_n=\tfrac{1}{2}\pi \qquad n=1, 2, \cdots$$

$$(8)\qquad k_n=2^{n-1},\ r_n=0,\ K_n=(-1)^n2^nn!\,g_n.$$

$$(9)\qquad A_n=2,\ B_n=0,\ C_n=1.$$

$$(10)\qquad \lambda_n=n^2,\ \alpha_n=0,\ \beta_n=n.$$

对于 $U_n(x)$

$$(11)\qquad h_n=\tfrac{1}{2}\pi,\ k_n=2^n,\ r_n=0,\ K_n=(-1)^n2^{n+1}n!\,g_{n+1}.$$

(12) $A_n=2,\ B_n=0,\ C_n=1.$

(13) $\lambda_n=n(n+2),\ \alpha_n=0,\ \beta_n=n+1.$

(iii) 罗特列恰公式

(14) $2^n(\frac{1}{2})_n T_n(x)=(-1)^n(1-x^2)^{\frac{1}{2}} D^n[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}].$

(15) $2^{n+1}(\frac{1}{2})_{n+1} U_n(x)$

$=(-1)^n(n+1)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} D^n[(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}].$

遞推公式 $[z_n(x)$ 代表 $T_n(x)$ 或 $U_n(x)]$

(16) $z_{n+1}(x)=2xz_n(x)-z_{n-1}(x).$

克列司托費尔-达布克司公式

(17) $$\sum_{m=0}^{n}{}' z_m(x)z_m(y)=(x-y)^{-1}[z_{m+1}(x)z_m(y)-z_m(x)z_{m+1}(y)]$$

此处 z_n 代表 T_n 或 U_n，但在 T_n 的情形下，和式中的第一項 $(m=0)$ 应取半值.

微分方程

(18) $(1-x)y''-xy'+n^2y=0,\ y=T_n(x).$

(19) $(1-x)y''-3xy'+n(n+2)y=0,\ y=U_n(x).$

微分公式(一撇表示对 x 的微分)

(20) $(1-x^2)T_n'(x)=n[T_{n-1}(x)-xT_n(x)].$

(21) $(1-x^2)U_n'(x)=(n+1)U_{n-1}(x)-nxU_n(x).$

顯表示式

(22) $$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m},\quad n=1,2,\cdots$$

(23) $$U_n(x)=\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^m(n-m)!}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m}.$$

(iv) 超比函数

(24) $T_n(x)=F(-n,\ n;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x).$

(25) $$U_n(x)=(n+1)F\left(-n,\ n+1;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right).$$

从这二公式及 10-9 (iv) 可得

(26) $D^m T_n(x) = 2^{m-1}(m-1)!\, nC_{n-m}^m(x)$ $\qquad n \geqslant m.$

(27) $D^m U_n(x) = 2^m m!\, C_{n-m}^{m+1}(x)$ $\qquad n \geqslant m.$

(28) $T_n'(x) = nU_{n-1}(x).$

(v) 母函数

(29) $$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) z^n = \frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}.$$

(30) $$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} T_n(x) z^n = -\ln(1-2xz+z^2).$$

(31) $$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) z^n = (1-2xz+z^2)^{-1}.$$

(32) $$\sum_{n=0}^{\infty} g_n T_n(x) z^n = 2^{-1/2} R^{-1} (1-xz+R)^{1/2}.$$

(33) $$\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1} U_n(x) z^n = 2^{-1/2} R^{-1}(1-xz+R)^{-1/2}.$$

在所有上面的五个公式中，$-1<x<1$，$|z|<1$. 在后面二个公式中 $R=(1-2xz+z^2)^{1/2}$. 方程 (31) 是 10-9 (29) 的一个特例，(30)是同一关系式的一个極限情形；(29) 可从(30)中導出. 如 $z=0$，則 $R=1$ 及 $\ln R^2=0$. 公式(32)及(33)是 10-9 (28) 的特殊情形.

(vi) 積分表示式

表示車比雪夫多項式的圍綫積分可从任一母函数中推出.

(vii) 各种結果

(34) $2T_m(x)T_n(x) = T_{n+m}(x) - T_{n-m}(x)$ $\qquad n \geqslant m.$

(35) $2(x^2-1)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x) = T_{n+m}(x) - T_{n-m}(x)$ $\qquad n \geqslant m.$

(36) $2T_m(x)U_{n-1}(x) = U_{n+m-1}(x) + U_{n-m-1}(x)$ $\qquad n > m.$

(37) $2T_n(x)U_{m-1}(x) = U_{n+m-1}(x) - U_{n-m-1}(x)$ $\qquad n > m.$

(38) $2[T_n(x)]^2 = 1 + 2T_{2n}(x)$, $2T_n(x)U_{n-1}(x) = U_{2n-1}(x).$

(39) $2(1-x^2)[U_{n-1}(x)]^2 = 1 - 2T_{2n}(x).$

(40) $$\sum_{m=0}^{n} T_{2m}(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} U_{2n}(x),\quad \sum_{m=0}^{n-1} T_{2m+1}(x) = \tfrac{1}{2} U_{2n-1}(x).$$

(41) $$2(1-x^2)\sum_{m=0}^{n} U_{2m}(x) = 1 - T_{2n+2}(x).$$

(42) $$2(1-x^2)\sum_{m=0}^{n-1} U_{2m+1}(x) = x - T_{2n+1}(x).$$

所有这些公式都是三角恆等式的衍生.

米勒積分式 10-10 (43) 可以解釋为勒上特多項式及車比雪夫多項式之間的一种关系. 將这一关系倒轉过來,特列柯米 (1935) 求得了

(43) $$(n+\tfrac{1}{2})(1+x)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{x}(x-t)^{-\frac{1}{2}}P_n(t)\,dt = T_n(x) + T_{n+1}(x).$$

(44) $$(n+\tfrac{1}{2})(1-x)^{\frac{1}{2}}\int_{x}^{1}(t-x)^{-\frac{1}{2}}P_n(t)\,dt = T_n(x) - T_{n+1}(x).$$

从 10-9 (21) 及 10-9 (22) 可得

(45) $$P_n^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(2x^2-1) = g_n U_{2n}(x).$$

(46) $$xP_n^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(2x^2-1) = g_n T_{2n+1}(x).$$

最后我們提出下面的主值積分

(47) $$\int_{-1}^{1}(y-x)^{-1}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,T_n(y)\,dy = \pi U_{n-1}(x)$$

(48) $$\int_{-1}^{1}(y-x)^{-1}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}U_{n-1}(y)\,dy = -\pi T_n(x),\quad n=1,2,\cdots$$

它們是三角積分的衍生,在積分方程的理論中很重要,有时又称为翼形方程.

10-12. 拉甘尔多項式

多項式 $L_n^{\alpha}(x)$ 是適当标准化的正交多項式,与它連帶的是

(1) $$a=0,\ b=\infty,\ w(x)=e^{-x}x^{\alpha},\ X=x, \qquad \alpha>-1.$$

有时常用記法 $L_n(x)$ 代替 $L_n^0(x)$. 这是拉甘尔所提出的多項式. $L_n^{\alpha}(x)$ 常称为廣义拉甘尔多項式,但今后我們將簡称之为拉甘尔多項式. 与此等价的多項式,也曾由沙湼 (1880, p. 41)討論过.

(i) 标准化

我們將采用标准化公式 $k_n=(-1)^n/n!$，有时也用 $k_n=(-1)^n$，用得比較少的还有 $k_n=1$.

(ii) 常数

(2) $n!\,h_n=\Gamma(\alpha+n+1),\ n!\,k_n=(-1)^n,$

$nr_n=-(n+\alpha), \qquad K_n=n!$

(3) $(n+1)A_n=-1,\ (n+1)B_n=2n+\alpha+1,\ (n+1)C_n=n+\alpha.$

(4) $\lambda_n=n,\ \alpha_n=n,\ \beta_n=-(n+\alpha).$

(iii) 关系式

(5) $n!\,L_n^\alpha(x)=e^x x^{-\alpha}D^n(e^{-x}x^{n+\alpha}).$

(6) $L_0^\alpha(x)=1,\ L_1^\alpha(x)=\alpha+1-x.$

(7) $$L_n^\alpha(x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-m}\frac{(-x)^m}{m!}.$$

(8) $$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x)-(2n+\alpha+1-x)L_n^\alpha(x)+(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)=0.$$

(9) $$\sum_{m=0}^{n}\frac{m!}{\Gamma(m+\alpha+1)}L_m^\alpha(x)L_m^\alpha(y)=\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{1}{x-y}[L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(y)-L_{n+1}^\alpha(x)L_n^\alpha(y)].$$

(10) $xy''+(\alpha+1-x)y'+ny=0,\ y=L_n^\alpha(x).$

(11) $$(xz')'+\left(n+\frac{\alpha+1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{\alpha^2}{4x}\right)z=0,\ z=e^{-\frac12x}x^{\frac12\alpha}L_n^\alpha(x).$$

(12) $$x\frac{d}{dx}L_n^\alpha(x)=nL_n^\alpha(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)=(n+1)L_{n+1}^\alpha(x)-(n+\alpha+1-x)L_n^\alpha(x).$$

(13) $$L_n^\alpha(0)=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}.$$

(iv) 超比函数

拉盖尔多项式与第 6 章的合流超比函数有关．从顯表示式 (7) 有

$$(14)\quad L_n^\alpha(x)=\binom{x+\alpha}{n}\Phi(-n,\alpha+1;x)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\Psi(-n-\alpha,1-\alpha;x).$$

从此可得

$$(15)\quad \frac{d}{dx}L_n^\alpha(x)=-L_{n+1}^{\alpha+1}(x)$$

这就与 10–6 節的 (i) 一致.

$$(16)\quad \frac{d}{dx}[L_n^\alpha(x)-L_{n+1}^\alpha(x)]=L_n^\alpha(x).$$

还有很多其他公式,它們是隣接合流超比函数之間的关系的例子.

拉甘尔微分方程 (10) 的通解可从合流超比函数理論中推出.

(v) 母函数

$$(17)\quad \sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha(x)z^n=(1-z)^{-\alpha-1}\exp\frac{xz}{z-1}\qquad |z|<1.$$

$$(18)\quad \sum_{n=0}^\infty[\Gamma(n+\alpha+1)]^{-1}L_n^\alpha(x)z^n=(xz)^{-\frac{1}{2}\alpha}e^z J_\alpha[2(xz)^{\frac{1}{2}}].$$

$$(19)\quad \sum_{n=0}^\infty L_n^{\alpha-n}(x)z^n=e^{-xz}(1+z)^\alpha\qquad |z|<1.$$

$$(20)\quad \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^\alpha(x)\,L_n^\alpha(y)z^n$$

$$=(1-z)^{-1}\exp\left(-z\frac{x+y}{1-z}\right)(xyz)^{-\frac{1}{2}\alpha}I_\alpha\left[2\frac{(xyz)^{\frac{1}{2}}}{1-z}\right]$$

$$|z|<1.$$

(17)式右边的函数是最普遍的母函数,可以由(7)式來确立. 方程(18)是多許所提出,可用拉普拉斯变换从(17)式中推出. 方程(19)系由爱尔台里从(7)式導出. 方程(20)是一双綫性母函数,称为希耳–哈台公式(見 Myller-Lebedeff, 1907).

(vi) 積分表示式

拉甘尔多項式的圍綫積分表示式可从罗特列恰公式(5)導出,

也可从任一母函数中推出．此外，与合流超比函数的关系式(14)也可利用(見 6-11 節)．在这里我們只提出下面二个積分式

(21)　$n!\,L_n^\alpha(x)=e^x x^{-\frac{1}{2}\alpha}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{n+\frac{1}{2}\alpha}J_\alpha\left[2(tx)^{\frac{1}{2}}\right]dt.$

(22)　$2\pi i\,2^\alpha L_n^\alpha(x)=(-1)^n e^{\frac{1}{2}x}\int^{(1+)} e^{-\frac{1}{2}xz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^k(1-z^2)^{\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}}dz,$

$$k=n+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}.$$

第一式是 6-11 (5) 的推論；第二式是特列柯米所提出．

(vii) 其他結果

这一節中的結果是非常多的，而且有很多都是被几次發現的．我們只能选錄少数結果，而且不列原來發現者的名字．

隣接多項式

在遞推关系 (8) 之外，尙有

(23)　$xL_n^{\alpha+1}(x)=(n+\alpha+1)L_n^\alpha(x)-(n+1)L_{n+1}^\alpha(x)$

$$=(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)-(n-x)L_n^\alpha(x).$$

(24)　$L_n^{\alpha-1}(x)=L_n^\alpha(x)-L_{n-1}^\alpha(x).$

(25)　$(n+\alpha)L_n^{\alpha-1}(x)=(n+1)L_{n+1}^\alpha(x)-(n+1-x)L_n^\alpha(x).$

微分公式及不定積分

在 (5) 及 (12) 之外，尙有

(26)　$D^n[x^{-\alpha-1}\exp(-x^{-1})]=(-1)^n n!\,x^{-\alpha-n-1}L_n^\alpha(x^{-1})\exp(-x^{-1}).$

(27)　$D^m[x^\alpha L_n^\alpha(x)]=(n-m+\alpha+1)_m x^{\alpha-m}L_m^{\alpha-m}(x).$

(28)　$n!\,D^m[e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)]=(m+n)!\,e^{-x}x^{\alpha-m}L_{m+n}^{\alpha-m}(x).$

(29)　$\int_x^\infty e^{-y}L_n^\alpha(y)\,dy=e^{-x}[L_n^\alpha(x)-L_{n-1}^\alpha(x)].$

(30)　$\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\int_0^x(x-y)^{\beta-1}y^\alpha L_n^\alpha(y)\,dy$

$$=\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta)\,x^{\alpha+\beta}L_n^{\alpha+\beta}(x),$$

$$\operatorname{Re}\alpha>-1,\quad \operatorname{Re}\beta>0.$$

$$(31)\quad \int_0^x L_m(y)\,L_n(x-y)\,dy=\int_0^x L_{m+n}(y)\,dy$$
$$=L_{m+n}(x)-L_{m+n+1}(x).$$

其他不定積分可从拉普拉斯变换的乘積定理中得出.

拉普拉斯積分. 采用記法

$$\mathfrak{L}[F(t)]=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt,$$

于是有

$$(32)\quad \mathfrak{L}[t^\alpha L_n^\alpha(t)]=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)(s-1)^n}{n!\,s^{\alpha+n+1}},\quad \mathrm{Re}\,\alpha>-1,\ \mathrm{Re}\,s>0$$

$$(33)\quad n!\,\Gamma(\alpha+1)\,\mathfrak{L}[t^\beta L_n^\alpha(t)]$$
$$=\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)s^{-\beta-1}F(-n,\ \beta+1;\ \alpha+1;\ s^{-1}),$$
$$\mathrm{Re}\,\beta>-1,\ \mathrm{Re}\,s>0$$

$$(34)\quad \mathfrak{L}[t^{\frac{1}{2}\alpha+n}J_\alpha(2(kt)^{\frac{1}{2}})]=n!\,k^{\frac{1}{2}\alpha}s^{-\alpha-n-1}e^{-k/s}L_n^\alpha(k/s).$$

極限公式

$$(35)\quad L_n^\alpha(x)=\lim_{\beta\to\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x/\beta).$$

$$(36)\quad \lim_{n\to\infty}[n^{-\alpha}L_n^\alpha(x/n)]=x^{-\frac{1}{2}\alpha}J_\alpha(2x^{\frac{1}{2}}).$$

有限差分公式. 取記法

$$\Delta_\alpha f(\alpha)=f(\alpha+1)-f(\alpha),\ \Delta_\alpha^{n+1}f(\alpha)=\Delta_\alpha(\Delta_\alpha^n f(\alpha)),$$
$$n=1,2,\cdots$$

我們有

$$\Delta_\alpha^n f(\alpha)=\sum_{m=0}^n(-1)^{n-m}\binom{n}{m}f(\alpha+m),\qquad n=1,2,\cdots$$

因此

$$(37)\quad L_n^\alpha(x)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,x^\alpha}\Delta_\alpha^n\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

有限和. 除了已提出的之外尚有

$$(38)\quad \sum_{m=0}^n L_m^\alpha(x)=L_n^{\alpha+1}(x)=x^{-1}[(x-n)L_n^\alpha(x)+(\alpha+n)L_{n-1}^\alpha(x)].$$

(39) $L_n^{\alpha}(x)=\sum_{m=0}^{n}(m!)^{-1}(\alpha-\beta)_m L_{n-m}^{\beta}(x).$

(40) $L_n^{\alpha}(\lambda x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{m}\lambda^{n-m}(1-\lambda)^m L_{n-m}^{\alpha}(x).$

(41) $\sum_{m=0}^{n} L_m^{\alpha}(x)\, L_{n-m}^{\beta}(y)=L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y).$

(42) $n!\, L_n^{\alpha}(x)\, L_n^{\alpha}(y)$

$$=\Gamma(\alpha+n+1)\sum_{m=0}^{n}[m!\,\Gamma(\alpha+m+1)]^{-1}(xy)^m L_{n-m}^{\alpha+2m}(x+y).$$

無窮級数:母函数已列于(17)至(20). 貝塞尔函数展开式見10-15, 其他包含拉甘尔多項式的無窮級数的例子見 10-20 節.

10-13. 漢米特多項式

漢米特多項式是与区間$(-\infty,\infty)$及指数权函数相連帶的正交多項式. 許多作者所用的記法有很大的不同. 指数权函数的最簡形式似为$\exp(-x^2)$,但在数学統計学的应用中以用$\exp(-\frac{1}{2}x^2)$較为合適. 在有关这一方面的許多重要著作中, Courant-Hilbert, Doetsch, Sansone, Szegö 等用 $\exp(-x^2)$, 而 Appell 和 Kampé de Fériet, Jahnke-Emde, Magnus-Oberhettinger, Pólya-Szegö 及 Tricomi 則用权函数 $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$. 在这一章里,我們采用 Szegö (1939) 的記法,并把漢米特多項式 $H_n(x)$ 作为与

(1) $a=-\infty,\ b=\infty,\ w(x)=\exp(-x^2),\ X=1$

相連帶的適当地标准化的正交多項式.

与权函数 $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ 連帶的正交多項式記为 $He_n(x)$. 这些函数也可用抛物柱函数[見 8-2 (9)]來表示.

(i) 标准化

我們采用标准化公式 $K_n=(-1)^n$. 这与 Courant-Hilbert, Feldheim, Hille 及 Szegö 等所用的一致. Doestch, Erdélyi, Sansone 及另外一些作者則用 $K_n=1$.

这样标准化的漢米特多項式曾由斯高及科許米达用拉甘尔多項式表示.

(2) $H_{2m}(x)=(-1)^m 2^{2m} m!\, L_m^{-1/2}(x^2)$.

(3) $H_{2m+1}(x)=(-1)^m 2^{2m+1} m!\, xL_m^{1/2}(x^2)$.

这些式子表明 $H_n(x)$ 根据 n 为偶数或奇数而是 x 的偶函数或奇函数. 这些公式与 10-9 (21) 及 10-9 (22) 类似(事实上是它們的極限情形).

(ii) 常数

(4) $h_n=\pi^{1/2} 2^n n!,\ k_n=2^n,\ r_n=0$.

(5) $K_n=(-1)^n,\ A_n=2,\ B_n=0,\ C_n=2n$.

(6) $\lambda_n=2n,\ \alpha_n=0,\ \beta_n=2n$.

(iii) 关系式

(7) $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}$.

(8) $H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x$.

(9) $$H_n(x)=n!\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^m(2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}.$$

此处 $[n/2]$ 等于 $n/2$ 或 $(n-1)/2$, 根据 n 是偶数或奇数而定.

(10) $H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0$.

(11) $$\sum_{m=0}^{n}\frac{H_m(x)H_m(y)}{2^m m!}=\frac{H_{n+1}(x)H_n(y)-H_n(x)H_{n+1}(y)}{2^{n+1}n!\,(x-y)}.$$

(12) $y''-2xy'+2ny=0,\ y=H_n(x)$.

(13) $z''+(2n+1-x^2)z=0,\ z=\exp(-\tfrac{1}{2}x^2)H_n(x)$.

(14) $H_n(-x)=(-1)^n H_n(x),\ H_n'(x)=2nH_{n-1}(x)$.

(15) $H_{2m}(0)=(-1)^m(2m)!/m!,\ H_{2m+1}(0)=0$.

(iv) 超比函数

漢米特多項式与抛物柱函数有关,后者是特种合流超比函数. 关系为

(16) $H_n(x)=2^{\frac{1}{2}n}\exp(\tfrac{1}{2}x^2)D_n(2^{1/2}x)=2^n\Psi(-\tfrac{1}{2}n;\ \tfrac{1}{2};\ x^2)$.

(17) $m!\,H_{2m}(x)=(-1)^m(2m)!\,\Phi(-m,\,1/2;\,x^2)$.

(18) $m!\,H_{2m+1}(x)=(-1)^m(2m+1)!\,2x\Phi(-m,\,3/2;\,x^2)$.

漢米特微分方程(12)或其自伴型(13)(它就是韋勒方程)的通解,可从抛物柱函数理論中得出.

(v) 母函数

(19) $\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)z^n/n!=\exp(2xz-z^2)$.

(20) $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m H_{2m}(x)z^{2m}/(2m)!=\exp(z^2)\cos(2^{1/2}xz)$.

(21) $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m H_{2m+1}(x)z^{2m+1}/(2m+1)!=\exp(z^2)\sin(2^{1/2}xz)$.

(22) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}n)^n}{n!}H_n(x)H_n(y)=(1-z^2)^{-1/2}\exp\left\{\frac{2xyz-(x^2+y^2)z^2}{1-z^2}\right\}$.

方程(19)就是大家都熟知的母函数,(20)及(21)式可从(19)式導出,(22)就是米勒公式.

(vi) 積分表示式

像通常一样,圍綫積分可从(7)式或从任一母函数中得出.此外,与抛物柱函数的关系也是可用的(見 8-3 節).这里我們提出下式:

(23) $e^{-x^2}H_n(x)=2^{n+1}\pi^{-1/2}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^n\cos(2xt-\frac{1}{2}n\pi)\,dt$.

(vii) 各种結果.見 10-12 (vii) 的說明.

極限

(24) $\lim_{m\to\infty}\left[\frac{(-1)^m m^{1/2}}{2^{2m}m!}H_{2m}\left(\frac{x}{2m^{1/2}}\right)\right]=\pi^{-1/2}\cos x$.

(25) $\lim_{m\to\infty}\left[\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!}H_{2m+1}\left(\frac{x}{2m^{1/2}}\right)\right]=2\pi^{-1/2}\sin x$.

積分

(26) $\int_0^x e^{-y^2}H_n(y)\,dy=H_{n-1}(0)-e^{-x^2}H_{n-1}(x)$.

(27) $\int_0^x H_n(y)\,dy = [2(n+1)]^{-1}[H_{n+1}(x) - H_{n+1}(0)].$

(28) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_{2m}(xy)\,dy = \pi^{1/2} \frac{(2m)!}{m!}(x^2-1)^m,$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y H_{2m+1}(xy)\,dy = \pi^{1/2} \frac{(2m+1)!}{m!} x(x^2-1)^m.$$

(29) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^n H_n(xy)\,dy = \pi^{1/2} n!\, P_n(x).$

此处 $P_n(x)$ 是勒上特多項式.

高斯变換.

$$\mathfrak{G}_x^u[F(y)] = (2\pi u)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\exp[-(x-y)^2/(2u)]\,dy$$

就是高斯变換(参数 u). 我們有

(30) $\mathfrak{G}_x^u[H_n(y)] = (1-2u)^{1/2 n} H_n[(1-2u)^{-1/2}x] \qquad 0 \leqslant u < 1/2.$

(31) $\mathfrak{G}_x^{1/2}[H_n(y)] = (2x)^n, \quad \mathfrak{G}_x^{1/2}[y^n] = (2i)^{-n} H_n(ix).$

与拉甘尔多項式的关系:

除了 (2) 及 (3) 以外,尚有

(32) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{2k}(x) H_{2n-2k}(y) = (-1)^n n!\, L_n(x^2+y^2).$

(33) $\int_0^{\infty} e^{-y^2}[H_n(y)]^2 \cos(2^{1/2}xy)\,dy = \pi^{1/2} 2^{n-1} n!\, L_n(x^2).$

(34) $\Gamma(n+\alpha+1)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-1/2} H_{2n}(x^{1/2}t)\,dt$

$$= (-1)^m \pi^{1/2}(2n)!\,\Gamma(\alpha+1/2)\, L_n^{\alpha}(x) \qquad \operatorname{Re}\alpha > -1/2.$$

前二式是法海英所給,后一式是烏司賓斯基 (1927) 所提出.

有限和

除已举者外,还有很多,玆略举如下:

(35) $\sum_{m=0}^{n} (2^m m!)^{-1}[H_m(x)]^2$

$$= (2^{n+1} n!)^{-1}\{[H_{n+1}(x)]^2 - H_n(x) H_{n+2}(x)\}.$$

(36) $$\sum_{k=0}^{\min(m,n)}(-2)^k k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}H_{m-k}(x)\,H_{n-k}(x)=H_{m+n}(x).$$

(37) $$\sum_{k=0}^{\min(m,n)}2^k k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}H_{m+n-2k}(x)=H_m(x)\,H_n(x).$$

(38) $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}H_k(2^{1/2}x)\,H_{m-k}(2^{1/2}y)=2^{1/2m}H_m(x+y).$$

(39) $$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}H_{2k}(2^{1/2}x)+H_{2m-2k}(2^{1/2}y)$$
$$=2^{m-1}[H_{2m}(x+y)+H_{2m}(x-y)].$$

(40) $$\sum_{m_1+\cdots+m_r=n}\frac{\alpha_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{\alpha_r^{m_r}}{m_r!}H_{m_1}(x_1)\cdots H_{m_r}(x_r)$$
$$=\frac{(\alpha_1^2+\cdots+\alpha_r^2)^{1/2n}}{n!}H_n\left[\frac{\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_rx_r}{(\alpha_1^2+\cdots+\alpha_r^2)^{1/2}}\right].$$

(35) 式是 Demir 及 Hsü 提出，最后三个公式是加法定理，可用母函数(19)來証明．在(40)中，和式可推廣到所有非負整数 $m_1, \cdots, m_r$，它們的和是 n.

無窮級数

母函数如 (19) 至 (22). 展开为球面貝塞尔函数的展开式見 10-15，其他包含漢米特多項式的無窮級数見 10-20 節．

10-14．雅可比，蓋根堡，勒上特多項式的漸近性态

雅可比多項式在 $n\to\infty$，同时 x 適当地 $\to 1$ 时的性态見 10-8 (41)．当 $x\to-1$ 时的性态可从 10-8 (13) 中看出，而蓋根堡及勒上特多項式的性态則可由 10-9 (4) 及 10-10 (3) 式得出．在 $\beta\to\infty$ 及 x 適当地 $\to 1$ 时，雅可比多項式的性态見 10-12 (35).

在研究雅可比多項式的無窮級数的收斂性的时候，以及在許多其他場合下，常須要确定雅可比多項式在 α, β, x 固定而 $n\to\infty$ 时的性态．車比雪夫多項式

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta,\quad x=\cos\theta$$

的例子，説明漸近性态將根据 x 在区間$(-1,1)$之上(θ 实数)或在区間$(-1,1)$之外(θ 复数)而有不同．同时，区間的两端点应分开研究．在这一節里，我們完全不考慮 x 在区間$(-1,1)$之外的情形，关于这一方面的討論可参看 Szegö (1939, 第 8 章)．我們將提出 $-1<x<1$ 的某些結果；而在这一節里的一切估計在任一区間 $-1+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ 上一致有效．我們也將給出 x 是在 ± 1 的隣域中的若干重要結果．

所給結果的証明或者以顯級数或積分表示式(如以積分表示式証明，則常用最陡下降法)为根据，或者以母函数 (Darboux 方法)或甚至以微分方程 (Liouville 法及其后的發展)为依据．

达布克司曾从母函数証明

$$(1)\quad P_n(\cos\theta)=2g_n\sum_{m=0}^{M-1}\frac{g_m(\tfrac12)_m}{(n-m+\tfrac12)_m}\frac{\cos[(n-m+\tfrac12)\theta-(\tfrac12 m+\tfrac14)\pi]}{(2\sin\theta)^{m+\frac12}}+O(n^{-M-\frac12}),\qquad 0<\theta<\pi,$$

式中的 g_n 由 10-10 (21) 式定义．

斯第耳吉司用估計余項的方法得出了一个类似的公式：

$$(2)\quad P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{n!\,g_m}{(m+\tfrac12)_{n+1}}\frac{\cos[(n+m+\tfrac12)\theta-(\tfrac12 m+\tfrac14)\pi]}{(2\sin\theta)^{m+\frac12}}+R_M(\theta)\qquad 0<\theta<\pi,$$

其中

$$(3)\quad |R_M(\theta)|\leqslant\frac{2}{\pi}\frac{n!\,g_M}{(M+\tfrac12)_{n+1}}\frac{A}{(2\sin\theta)^{M+\frac12}},$$

且

$$(4)\quad A=2\sin\theta\qquad 如\ \sin^2\theta\geqslant\tfrac12$$

$$A=|\cos\theta|^{-1}\quad 如\ \sin^2\theta\leqslant\tfrac12,$$

因此在任一情况下 $1\leqslant A\leqslant 2$.

如 $2\sin\theta>1$，卽对于 $\pi/6<\theta<5\pi/6$，則在 (1) 及 (2) 中都可令 $M\to\infty$ 而得勒上特多項式的收斂三角展开式.

对于 $x=1$ 的隣域，我們有希尔勃公式

$$(5)\qquad P_n(\cos\theta)=(\theta\csc\theta)^{1/2}J_0[(n+1/2)\theta]+O(n^{-3/2}),$$

对于 $0\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ 一致有效. 誤差項的更精确的界限，見 Szegö (1939, p. 189). 勒上特多項式展开为貝塞尔函数級数的展开式，参看 Szegö (1933). 如果 10-14 (11)式以 $\alpha=\beta=0$ 特殊化，且將此时的合流超比函数用 6-12 (6) 式展开为貝塞尔函数的級数，則得

$$(6)\qquad P_n(x)=[4/(x+3)]^{n+1}e^{-\xi/(2n+1)}\Big[J_0(2\xi^{1/2})+\frac{\xi}{8n^2}J_2(2\xi^{1/2})$$
$$+O(n^{-3})\Big],$$

其中

$$2(x+3)\xi=(1-x)(2n+1)^2.$$

有些結果可推廣至蓋根堡多項式，有的也可推廣至雅可比多項式.

$$(7)\qquad C_n^\lambda(\cos\theta)=2\frac{(\lambda)_n}{n!}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\lambda)_m(1-\lambda)_m}{(n-m+\lambda)_m m!}$$
$$\times\frac{\cos[(n-m+\lambda)\theta-1/2(m+\lambda)\pi]}{(2\sin\theta)^{\lambda+m}}+O(n^{-M-1/2})$$
$$\lambda\neq0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ 0<\theta<\pi.$$

$$(8)\qquad C_n^\lambda(\cos\theta)=2\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{[\Gamma(\lambda)]^2}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(1-\lambda)_m}{(m+\lambda)_{n+1}m!}$$
$$\times\frac{\cos[(n+m+\lambda)\theta-1/2(m+\lambda)\pi]}{(2\sin\theta)^{\lambda+m}}+R_M(\theta)$$
$$0<\lambda<1,\ 0<\theta<\pi.$$

$$(9)\qquad |R_M(\theta)|\leqslant2\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{[\Gamma(\lambda)]^2}\ \frac{(1-\lambda)_M}{(M+\lambda)_{n+1}M!}\ \frac{A}{(2\sin\theta)^{\lambda+M}},$$

其中 A 由 (4) 式給出.

$$(10)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\frac{\cos\{[n+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)]\theta-(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4})\pi\}}{(\pi n)^{\frac{1}{2}}(\sin\frac{1}{2}\theta)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\theta)^{\beta+\frac{1}{2}}}+O(n^{-\frac{3}{2}})\qquad \alpha,\beta\text{ 实数},\ 0<\theta<\pi.$$

雅可比多項式的一个希尔勃型公式曾由斯高及 Rau 分别提出，見 Szegö (1939, p. 191). 特列柯米 (1950 a) 得出了下面的展开式

$$(11)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=e^{-z}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{-N}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(N+m)\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(N)\Gamma(\alpha+m+1)}\times A_m(k,\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2})[z/(2k)]^m\Phi(-n-\beta,\alpha+m+1;z).$$

其中

$$(12)\quad k=n+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2},\ N=n+\alpha+\beta+1,\ x=1-4z/(2k+z),\quad |z|<2|k|,$$

Φ 是合流超比級数，A_m 为 6–12 節中所定义的系数. 应用展开式 6–12 (6), 可得雅可比多項式的一个貝塞尔函数展开式. 在 $\alpha=\beta=0$ 的特殊情形下，它導出 (6) 式.

10–15. 拉甘尔及漢米特多項式的漸近性态

上節的一般說明在此仍適用，但因区間是無限的，故情形要复什得多. 多項式在一部分区間上是振动的，而在这一部分之外則是單調的.

拉甘尔及漢米特多項式在 $n\to\infty$ 同时 x 適当地 $\to 0$ 时的漸近性态，如 10–12 (36) 式, 10–13 (24)式及 10–13 (25) 式.

对于实数 α 及固定的 $x>0$, 或在 $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant\omega<\infty$ 上一致的情形，有如下的 Fejér 公式

$$(1)\quad L_n^{\alpha}(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}x}x^{-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}}\cos[2(nx)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}\alpha\pi-\tfrac{1}{4}\pi]+O(n^{\frac{1}{2}\alpha-\frac{3}{4}}).$$

这一式曾由潘隆(見 Szegö, 1939, p. 192)加以推廣. 孙松 (1950) 給出了一个二項的近似式，具有誤差的估計. 这一公式在 x 很小

时不成立，但有一希尔勃型的公式

$$(2)\qquad e^{-\frac{1}{2}x}x^{\frac{1}{2}\alpha}L_n^{\alpha}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(\frac{1}{4}\nu)^{\frac{1}{2}\alpha}n!}J_{\alpha}[(\nu x)^{\frac{1}{2}}]+O(n^{\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}}),$$

这一式在 $\alpha>-1$，并在 $0<x\leqslant\omega<\infty$ 上一致时有效．在(2)式中，我們采用記法

$$(3)\qquad \nu=4n+2\alpha+2.$$

这一記法在本節中將一致采用．

拉甘尔多項式在 $n\to\infty$ 及 x 不受限制时的性态，曾由几位作者(見 6-13)研究过．我們在这里只能根据特列柯米的論文(1949)略提一下．特列柯米按 x 的接近于 0、在振动区域、接近于 ν 或在單調区域而分成四种情形．

展开式

$$(4)\qquad n!\,e^{-\frac{1}{2}x}L_n^{\alpha}(x)$$

$$=\Gamma(\alpha+n+1)(\nu x/4)^{-\frac{1}{2}\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^*(x/\nu)^{\frac{1}{2}m}J_{\alpha+m}([\nu x]^{\frac{1}{2}})$$

是 6-12 (11) 的一个特殊情形，其中

$$(5)\qquad A_0^*=1,\ A_1^*=0,\ A_2^*=\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2},$$

$$(m+2)A_{m+2}^*=(m+\alpha+1)A_m^*-\tfrac{1}{2}\nu A_{m-1}^*,\qquad m=1,2,\cdots$$

展开式 (4) 在复变数 x 的任一有界域中一致收斂．考察一下逐次項的大小的階数，就可看出只要 $\lambda<\frac{1}{3}$ 时 $x=O(n^{\lambda})$，則式 (4) 就是当 $n\to\infty$ 时的一个漸近展开式．这就建立了 $L_n^{\alpha}(x)$在“接近于”原点时的性态．

同样的展开式

$$(6)\qquad n!\,(ux)^{\frac{1}{2}\alpha}e^{-hx}L_n^{\alpha}(x)=\Gamma(\alpha+n+1)\sum_{m=0}^{\infty}A_m(h)(x/u)^{\frac{1}{2}m}$$

$$\times J_{\alpha+m}(2[ux]^{\frac{1}{2}})$$

在系数取適当値时是托司肯諾 (1949) 公式，而如 $u=n$，則是特列柯米 (1941) 公式．

在振动的区域中，$0<x<\nu$，特列柯米命

(7) $x=\nu\cos^2\theta,\ 0<\theta<\frac{1}{2}\pi,\ 4\Theta=\nu(2\theta-\sin 2\theta)+\pi,$

并証明，对于固定的 θ，有

(8) $$e^{-\frac{1}{2}x}L_n^{\alpha}(x)=2(-1)^n(2\cos\theta)^{-\alpha}(\pi\nu\sin 2\theta)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}A_m^{(\alpha)}(\theta)(\tfrac{1}{4}\nu\sin 2\theta)^{-m}\sin(\Theta+3m\pi/2)+O(n^{-M})\right]$$

其中

(9) $$A_0^{(\alpha)}(\theta)=1,\ A_1^{(\alpha)}(\theta)=\frac{1}{12}\left[\frac{5}{4\sin^2\theta}-(1-3\alpha^2)\sin^2\theta-1\right].$$

$A_m^{(\alpha)}$ 的一般式見 Tricomi (1949).

在过渡点 ν 的附近，有

(10) $$e^{-\frac{1}{2}x}L_n^{\alpha}(x)=\gamma_1\left\{A(t)+\left(\frac{4}{3\nu^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{t^2}{5}A'(t)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3+5\alpha}{10}\left(t-\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2\Gamma(\frac{2}{3})}\right)A(t)\right]+O(n^{-\frac{4}{3}})\right\}$$

其中

(11) $t=(4\nu/3)^{-\frac{1}{3}}(\nu-x),$

(12) $$\pi\gamma_1=(-1)^n2^{-\alpha}\left[6^{\frac{1}{3}}\nu^{-\frac{1}{3}}+\frac{3+5\alpha}{10}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\nu^{-1}+O(n^{-5/3})\right],$$

(13) $$A(t)=(\pi/3)(t/3)^{\frac{1}{2}}\{J_{-\frac{1}{3}}[2(t/3)^{\frac{3}{2}}]+J_{\frac{1}{3}}[2(t/3)^{\frac{3}{2}}]\}$$

是爱里函数，$A'(t)$ 是 $A(t)$ 的導数.

最后，在單調区域内

(14) $x=\nu\,\mathrm{ch}^2\theta,\ \theta>0,\ 4\Theta=\nu(\mathrm{sh}\,2\theta-2\theta),$

(15) $$e^{-\frac{1}{2}x}L_n^{\alpha}(x)=(-1)^ne^{-\Theta}(2\,\mathrm{ch}\,\theta)^{-\alpha}(\pi\nu\,\mathrm{sh}\,2\theta)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^mA_m^{[\alpha]}(\theta)(\tfrac{1}{4}\nu\,\mathrm{sh}\,2\theta)^{-m}+O(n^{-M})\right]$$

其中

(16) $$A_0^{[\alpha]}(\theta)=1,\ A_1^{[\alpha]}(\theta)=\frac{1}{12}\left[\frac{5}{4\,\mathrm{sh}^2\theta}-(1-3\alpha^2)\,\mathrm{sh}^2\theta+1\right].$$

在下面的漢米特多項式的对应結果中，我們采用簡記

(17)　$N=2n+1,\ m=\begin{cases}\frac{1}{2}n & \text{如 } n \text{ 为偶数,}\\ \frac{1}{2}n-\frac{1}{2} & \text{如 } n \text{ 为奇数.}\end{cases}$

对于一个固定的实数 x (或在任一有界区間上一致的 x)，有

(18)　$$\Gamma(\tfrac{1}{2}n+1)\exp(-\tfrac{1}{2}x^2)H_n(x)$$
$$=\Gamma(n+1)\left[\cos(N^{\frac{1}{2}}x-\tfrac{1}{2}n\pi)+O(n^{-\frac{1}{2}})\right].$$

斯高 (1939, p. 194)給出了上式的第二項，及漸近展开式的一般形式.

漢米特多項式在 $n\to\infty$ 而 x 不限制时的性态有 Plancherel-Rotach 公式(Szegö 1939, p. 195)，特列柯米的著作中也包括这种情形，但用的是 10-13 (2) 及 10-13 (3). 公式(4)中所包含的貝塞尔函数在 $\alpha=\pm\frac{1}{2}$ 时，叫做球面貝塞尔函数，可用緊凑形式來表示. 只要对于某些 $\lambda<\frac{1}{3}$，量 $n^{-\lambda}x$ 在 $n\to\infty$ 时保持有界，則就可把它当作漸近展开式.

振动的区域是 $0<|x|<2m^{\frac{1}{2}}$，在这区域里，我們可用展开式(8)，取 $\alpha=\pm\frac{1}{2}$. 在过渡点 $x=\pm 2m^{\frac{1}{2}}$ 的隣域中可用公式 (10)，而在單調的区域 $|x|>2m^{\frac{1}{2}}$ 中則可用 (15) 式.

展为球面貝塞尔函数級数的基礎展开式是特列柯米(1941)所提出的一般展开式的特殊情形:

(19)　$$e^{-hx^2}H_{2m}(x)=(-1)^m 2^{2m+1}(\tfrac{1}{2})_m x^2\sum_{r=0}^{\infty}(2m)^{1-r}C'_r\mathcal{G}_{r-1}(2m^{\frac{1}{2}}x)$$

(20)　$$e^{-hx^2}H_{2m+1}(x)=(-1)^m 2^{2m+1}(\tfrac{3}{2})_m x\sum_{r=0}^{\infty}(2m)^{-r}C''_r\mathcal{G}_r(2m^{\frac{1}{2}}x),$$

其中

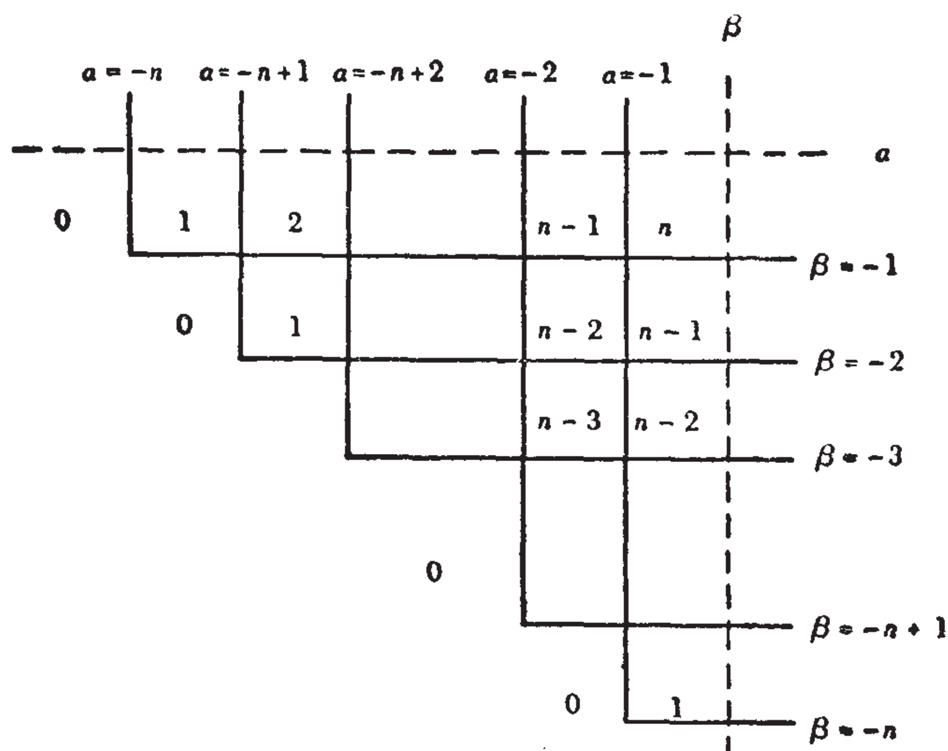
(21)　$\mathcal{G}_0(z)=z^{-1}\sin z,\ \mathcal{G}_{-1}(z)=z^{-2}\cos z,$

(22)　$\mathcal{G}_{r+1}(z)=(2r+1)\mathcal{G}_r(z)-z^2\mathcal{G}_{r-1}(z),\qquad r=0,1,2,\cdots$

系数 C_r 也满足一定的遞推关系. 展开式 (19) 及 (20) 是收斂的. 当 $m\to\infty$ 时，这二式可作为漸近表示式，这时以取 $h=\frac{1}{2}$ 較为方便.

10-16. 雅可比及有关多项式的零点

設对于 α, β, x 的所有值，雅可比多项式以 10-8(12) 式定义，并設 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 在区間 $(-1, 1)$ 上的零点数为 $N_1(\alpha, \beta)$. 如 $\alpha > -1$, $\beta > -1$, 則雅可比多项式是与权函数 10-8(1) 連帶的正交多项式；根据 10-3 節可知，所有它的零点都是單階的，且都位于 $(-1, 1)$ 之上. α 及 β 取其他实数值时在区間 $(-1, 1)$ 上的零点数，如下圖所示.



α, β 为实数时的 $N_1(\alpha, \beta)$

从 10-8(12) 式可知，对于負整数的 α, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 在 $x=1$ 上具有一个 $|\alpha|$ 階零点，而对于負整数的 β, 則在 $x=-1$ 上具有一个 $|\beta|$ 階零点. 在区間 $(-\infty, -1)$ 上，共有 $N_1(1-\alpha-\beta-2n, \beta)$ 个零点，而在区間 $(1, \infty)$ 上則共有 $N_1(1-\alpha-\beta-2n, \alpha)$ 个零点. 这里所指出的所有零点数中，以共轭复数对出現者不估計在內.

对于所有的 λ, x 值，盖根堡多项式以 10-9(18) 式定义. 它們是正交的，如 $\lambda > -\frac{1}{2}$, 則它們的所有零点都是單階的，且位于区

間 $(-1,1)$ 之內. λ 取其他实数値时,它們的零点数可用 10-9(4) 式从雅可比多項式的結果中推出.

正交雅可比多項式及其特殊情形在区間 $(-1,1)$ 上的零点的位置曾有很多作者研究过. 讀者可參看斯高的著作(1939,第6章), 近代的一些著作中,特別可參看 Gatteschi; Geronimus; Lowan; Davids, Leveson 及 Tricomi 的著作,見章末的參考文献.

設

(1) $\alpha>-1,\ \beta>-1,\ \lambda>-\frac{1}{2},\ x=\cos\theta \qquad 0<\theta<\pi.$

將零点排列为單調序列

(2) $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta_m)=0, \qquad 0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n<\pi.$

(3) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x_m)=0, \quad -1<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<1,\ x_m=\cos\theta_m.$

对于特种球多項式

(4) $x_m+x_{n-m}=0,$

因此,我們只要研究正零点 $(1\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}n)$ 就足夠了. 对于雅可比多項式

$$x_m=x_m(\alpha,\beta,n),$$

而对于蓋根堡多項式,

$$x_m=x_m(\lambda,n)=x_m(\lambda-\tfrac{1}{2},\lambda-\tfrac{1}{2},n).$$

如 m 及 n (在雅可比多項式的情形中,还有参数 α,β 之一)固定,則有如下的單調性質:

(5) $x_m(\alpha,\beta,n)\downarrow-1,$ 当 $\alpha\to\infty,$

$x_m(\alpha,\beta,n)\uparrow 1,$ 当 $\beta\to\infty, \qquad m=1,\cdots,n.$

(6) $x_m(\lambda,n)\downarrow 0,$ 当 $\lambda\to\infty, \qquad m=1,\cdots,[\frac{1}{2}n].$

这些关系中最后一式的意思,举例說就是:蓋根堡多項式的第 m 个(正的)零点是 λ 的嚴格降函数 $(\lambda>-\frac{1}{2})$ 而且在 $\lambda\to\infty$ 时趋向于 0. 从 (5) 及 (6) 可得 θ_m 的相应敍述. 由于我們从 10-11 (5) 及 10-11 (6) 已可得 $\theta_m(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},n)$, 因而可得下述不等式:

(7) $(2m-1)\pi \leqslant (2n+1)\,\theta_m(\alpha, \beta, n) \leqslant 2\,m\pi$

$-\frac{1}{2} \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant \frac{1}{2},\ 1 \leqslant m \leqslant n.$

(8) $(m-\frac{1}{2})\,\pi/n < \theta_m(\lambda, n) < m\pi/(n+1)$

$0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ 1 \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}n.$

其他結果見 Szegö (1939, 第 6 章). 特列柯米(1947)指出:任一函数零点的漸近性态可从函数本身的漸近性态中推出,他將这一原理应用于很多函数,就中也有正交多項式(見 Tricomi 1950, Gatteschi 1949, 1949 a). 这表明趋向于区間中部的零点的漸近分布与三角函数的零点[見 1-14 (5)]有关,而靠近区間两端的零点則与貝塞尔函数的零点[見 10-14 (12) 后的說明]有关.

克列司托費耳数的漸近公式可用公式 10-7 (7) 从零点的漸近公式中推出.

零点的数値及勒上特多項式的克列司托費耳数,見 Lowan, Davids 及 Levenson (1942, 1943).

10-17. 拉甘尔及漢米特多項式的零点

对于 α 及 x 的所有値,由 10-12(7)式定义的多項式在 $\alpha > -1$ 时具有 n 个正零点,在 $-n < \alpha \leqslant -1$ 时具有 $[n+\alpha]$ 个正零点,而在 $\alpha < -n$ 时則沒有正零点;当 $\alpha = -k,\ k=1, 2, \cdots, n$, 时在 $x=0$ 处具有一 k 階零点;如 $(\alpha+1)_n < 0$ 則具有一負零点. 这里所指出的所有零点数中,以共軛复数对出現的不估計在內. n 次漢米特多項式具有 n 个实零点,对称地位于原点的周圍.

关于正交拉甘尔多項式(卽 $\alpha > -1$)及正交漢米特多項式零点位置的詳細研究,可参看 Szegö (1939, 第 6 章) 及 Greenwood 与 Miller (1948), W. Hahn (1934), Salzer 及 Zucker (1949), Spancer (1937), Tricomi 等的著作.

設

(1) $\alpha > -1,\ x > 0.$

將 $L_n^\alpha(x)$ 的零点按升序排列，因此

(2)　$L_n^\alpha(x_m)=0,\ 0<x_1<x_2<\cdots<x_n,\ x_m=x_m(\alpha, n).$

对于固定的 m, n，可知 x_m 是 α 的增函数．零点的境界見 Szegö (1939, 第 6 章)及 W. Hahn (1934)．拉甘尔多項式及漢米特多項式的漸近表示式可用以求零点的近似式 (Tricomi 1949)．从 10–15 節顯然可知，我們应分別三种情况，"第一种"零点就是 $n\to\infty$ 时 m 保持有界的那些零点，这些零点可用 10–15(2)式來研究．"中間"的零点是 $n\to\infty$ 时 $|m-\frac{1}{2}n|$ 保持有界的那些零点，可从 10–15 (8) 式推出．"最后"的零点是 $n\to\infty$ 时 $n-m$ 保持有界的那些零点，可从 10–15 (10) 式推出．所得的近似式給出了即使在 n 取適当值，如 $n=10$ 时也能適用的数值結果．

克列司托費耳数的漸近公式可从 10–7 (7) 式中導出．

拉甘尔多項式 $L_n(x)$ 的克列司托費耳数及零点的数值，見 Salzer 及 Zucker (1949)．

10–18. 經典多項式的不等式

关于一般正交多項式的不等式及其在經典多項式中的应用，見 Szegö (1939, 第 7 章)．

在用 10–3 節的記法中，对于單調权函数有下面的定理(見 Szegö 1939, 定理 7–2)．設 $w(x)$ 为非降[非升]函数且 $b[a]$有限，則 $[w(x)]^{1/2}|P_n(x)|$ 在 $b[a]$ 上达到其在区間 (a, b) 中的最大值．

將这一定理应用于权函数为單調函数的經典正交多項式，就可得出下列不等式：

(1)　$|P_n(x)|\leqslant 1$　　$-1\leqslant x\leqslant 1.$

(2)　$[(1-x)/2]^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}}|P_n^{(\alpha,0)}(x)|\leqslant 1$　　$-1\leqslant x\leqslant 1,\ \alpha\geqslant -\frac{1}{2}.$

(3)　$e^{-\frac{1}{2}x}|L_n(x)|\leqslant 1$　　$x\geqslant 0.$

不等式的另一來源就是沙湼–波利雅定理 (Szegö 1939, 定理 7–31–1 及脚註)．如在微分方程

(4) $[k(x)y']' + \phi(x)y = 0$

中，$k(x)$ 及 $\phi(x)$ 都是正的連續可微函数，如 $k(x)\ \phi(x)$ 單調，則 $|y|$ 的逐次極大(相对的)將根据 $k(x)\ \phi(x)$ 是降或增而組成增序列或減序列.

下列的結果可这样來得到証明，卽作出所論函数所滿足的微分方程而后应用沙湼-波利雅定理.

$|P_n(x)|$, $n\geqslant 2$ 在 x 由 0 增至 1 时的逐次極大組成一遞增序列 [这証实了公式 (1)]. $(\sin\theta)^{1/2}|P_n(\cos\theta)|$, $n\geqslant 2$, 在 θ 由 0 增至 $\frac{1}{2}\pi$ 时的逐次極大組成一遞增序列. 作为一个应用，可以証明，下列不等式成立，卽

(5) $$(\sin\theta)^{1/2}|P_n(\cos\theta)| < (\tfrac{1}{2}\pi n)^{-1}, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

此外，

(6) $$|P_n'(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}n(n+1), \qquad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

对于蓋根堡多項式

(7) $$\max_{-1<x<1}|C_n^\lambda(x)| = C_n^\lambda(1) = \frac{(2\lambda)_n}{n!}, \qquad \lambda>0.$$

(8) $$\max_{-1<x<1}|C_{2m}^\lambda(x)| = |C_{2m}^\lambda(0)| = \left|\frac{(\lambda)_m}{m!}\right|,$$

$-m<\lambda<0$, λ 不为整数.

(9) $$\max_{-1<x<1}|C_{2m+1}^\lambda(x)| < 2[(2m+1)(2\lambda+2m+1)]^{-1/2}|(\lambda)_{m+1}|/m!,$$

$-m-\frac{1}{2}<\lambda<0$, λ 不为整数.

(10) $$(\sin\theta)^\lambda|C_n^\lambda(\cos\theta)| < (\tfrac{1}{2}n)^{\lambda-1}[\Gamma(\lambda)]^{-1},$$

$0<\lambda<1$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

对于雅可比多項式，令

(11) $$q = \max(\alpha, \beta),$$

而得

(12) $$\max_{-1<x<1}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = \max P_n^{(\alpha,\beta)}(\pm 1) = \binom{n+q-1}{n},$$

$\alpha>-1$, $\beta>-1$, $q\geqslant -\frac{1}{2}$.

如 $-1<\alpha$, $\beta<-\frac{1}{2}$, 則 $|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|$ 的最大的極大是最靠近 $x_0=(\beta-\alpha)/(\alpha+\beta+1)$ 的二个中的一个，而这一極大在 $n\to\infty$ 时是 $n^{-\frac{1}{2}}$ 階的. 在 n 很大时的許多估値中，我們只提出下面的一个：

$$\frac{d^m}{dx^m}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=O(n^q),\ q=\max(2m+\alpha,\ 2m+\beta,\ m-\tfrac{1}{2}),\quad n\to\infty. \tag{13}$$

对于特殊的拉甘尔多項式 L_n^0, 我們已有 (3) 式. 从这一式应用 10-12 (39) (取 $\beta=0$) 就可得 L_n^α 的境界. 結果是

$$|L_n^\alpha(x)|\leqslant(\alpha+1)_n(n!)^{-1}e^{\frac{1}{2}x},\qquad \alpha\geqslant 0. \tag{14}$$

$$|L_n^\alpha(x)|\leqslant[2-(\alpha+1)_n(n!)^{-1}]\,e^{\frac{1}{2}x},\qquad -1<\alpha<0. \tag{15}$$

对所論函数所满足的微分方程，应用沙湟-波利雅定理就可得下列結果.

对于实数的 α,

$$e^{-\frac{1}{2}x}x^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}}|L_n^\alpha(x)|$$

的逐次極大，只要 $2n+\alpha+1>1$, 且

$$x>\max\{0,\ (\alpha^2-1)/(2n+\alpha+1)\},$$

則組成一遞增序列.

$$e^{-\frac{1}{2}x}x^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}}|L_n^\alpha(x)|$$

的逐次極大，只要 $x>0$, 且

$$x^2>\max(0,\ \alpha^2-\tfrac{1}{4}),$$

則組成一遞增序列.

$$e^{-\frac{1}{2}x}|L_n^\alpha(x)|$$

的逐次極大在 $\alpha>-1$,

$$0<x<(2\alpha+1)(2n+\alpha+1)/(\alpha+1)$$

时組成一遞降序列而在 $\alpha>-1$,

$$x>(2\alpha+1)(2n+\alpha+1)/(\alpha+1)$$

时則組成一遞增序列.

$$e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{1}{2}\alpha} L_n^\alpha(x)$$

的逐次極大在 $0<x<2n+\alpha+1$ 时組成一遞降序列，而在

$$x>2n+\alpha+1>0$$

时組成一遞增序列.

所有上面这些敍述都可以概括在一个更普遍的結果中，如下：对于实数 α 及 β, 在 $x>0$ 时

$$e^{-\frac{1}{2}x} x^\beta |L_n^\alpha(x)|$$

的逐次極大將組成一遞增或遞降序列，根据

$$4\beta(\beta-\alpha)(\alpha-2\beta)+(2n+\alpha+1)(2\alpha-4\beta+1)x \\ -(\alpha-2\beta+1)x^2$$

是負的或正的來决定。

漸近估値見 Szegö (1939, 定理 7-6-4)；这一估値的校正可从特列柯米展开式 10-15 (4) 中求得.

漢米特多項式的境界，可从 (14) 及 (15) 式用 10-13 (2) 及 10-13 (4) 式求得. 还可参看 Sansone (1950 a).

(16) $\quad \exp(-\frac{1}{2}x^2)|H_{2m}(x)| \leqslant 2^{2m} m!(2-g_m)$

(17) $\quad x^{-1}\exp(-\frac{1}{2}x^2)|H_{2m+1}(x)| \leqslant 2^{2m+2}(m+1)!\, g_{m+1},$

其中

(18) $\quad g_n=(\frac{1}{2})_n/n!=(\pi n)^{-\frac{1}{2}}+O(n^{-\frac{3}{2}}).$

H. 克拉美曾証明

(19) $\quad \exp(-\frac{1}{2}x^2)|H_n(x)|<k2^{\frac{1}{2}n}(n!)^{\frac{1}{2}},$

其中 k 为一常数，它的近似値經查萊 (1931) 算出为 1.086435. 孙松 (1950) 給出了对于变量的复数值有效的境界.

从沙湼-波利雅定理可証 $|H_n(x)|$ 及 $\exp(-\frac{1}{2}x^2)|H_n(x)|$ 在 $x\geqslant 0$ 时的逐次極大組成一遞增序列.

設 $\mu_{r,n}$ 为 $f(x)|p_n(x)|$ 的第 r 个(相对的)極大，其中 $f(x)$ 为一固定的非負函数，$\{p_n(x)\}$ 为正交多項式的一个序列. 从沙湼-波利雅定理導出的結果，說明了在 r 遞增而 n 固定时 $\mu_{r,n}$ 的

單調性質．对数值表的研究，使 J. 托特对 $\mu_{r,n}$ 在 r 固定而 n 遞增时的單調性質作出了某些推測．下面的一些結果是以后証明的．对于

$$f(x)=1,\ p_n(x)=P_n(x),$$

并計算从 $x=1$ 向左的極大，柯潘 (1950) 曾証明当 n 足夠大时，$\mu_{r,n}$ 是 n 的減函数，而斯高 (1950) 則証明这一結果对于所有的 $n\geqslant r+1$ 都正确．对于

$$f(x)=1,\ p_n(x)=C_n^{\lambda}(x),$$

沙司(1950)曾証明 $n!\,\mu_{r,n}/\Gamma(n+2\lambda)$ 是 n 的減函数．对于

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x},\ p_n(x)=L_n(x),$$

J. 托特(1950)曾証明 $\mu_{r,n}$ 視 r 为奇数或偶数而为 n 的增函数或減函数．

P. 屠侖發現

$$u_n=P_n(x) \qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

滿足不等式

(20) $u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}\geqslant 0.$

斯高对这一不等式提出了几种証法，并証明这一不等式亦为下列函数所滿足：

$$u_n=C_n^{\lambda}(x)/C_n^{\lambda}(1)=n!\,C_n^{\lambda}(x)/(2\lambda)_n, \qquad -1\leqslant x\leqslant 1;$$

$$u_n=L_n^{\alpha}(x)/L_n^{\alpha}(0)=n!\,L_n^{\alpha}(x)/(\alpha+1)_n, \qquad x\geqslant 0;$$

$$u_n=H_n(x).$$

所有这些結果都經过重行証明，修正和推廣；以正交多項式为元素的行列式曾由下列作者研究过，其他有关研究也曾由他們提出过，計 Madhava Rao 及 Thiruvenkatachar (1949), Sansone (1949), Szász (1950 a, 1951), Beckenbach, Seidel 及 Szász (1951), Forsythe(1951)．还可参看 J. L. Burchnall(1951, 1952) 的著作．

10-19. 展开問題

將一个已知的"任意"或解析函数展开为級数或正交多項式的問題，常被提出而詳細討論过．这一題目本來不在本書范圍之內，但概略地指出一些較重要的結果还是必需的．詳細的研究可參看 Szegö (1939, 主要第 9 章)，Kaczmarz 及 Steinhaus (1935).

設 $\{p_n(x)\}$ 为一正交多項式系，屬于区間 (a, b) 上的权函数 $w(x)$．設 10-1 及 10-2 節的假設在此仍適用，以 L_w^p, $p\geqslant 1$ 表示函数 $f(x)$ 类，对于这一类函数，李比司積分

$$\int_a^b |f(x)|^p\, w(x)\, dx$$

存在且有限．令

$$(1)\qquad h_n=\int_a^b [p_n(x)]^2 w(x)\, dx$$

并称

$$(2)\qquad a_n=h_n^{-1}\int_a^b f(x)\, p_n(x)\, dx$$

为富里哀系数，

$$(3)\qquad \Sigma a_n\, p_n(x)$$

为 $f(x)$ 关于正交多項式系 $\{p_n(x)\}$ 的富里哀級数(廣义的)．如果在 $n\to\infty$ 时有

$$(4)\qquad \int_a^b |f(x)-s_n(x)|^p\, w(x)\, dx\to 0,$$

則称級数(3)在 L_w^2 內收斂于 $f(x)$，这里 $s_n(x)$ 为(3)的第 n 个部分和．

在 L_w^2 中的逼近問題已在 10-2 節中討論过，从这一節的結果中可知，对于 L_w^2 的任一函数 $f(x)$，如区間 (a, b) 有限，則 (3) 在 L_w^2 中收斂于 $f(x)$．在 L_w^p 中收斂的問題，曾由 Pollard (1946, 1947, 1948, 1949) 及 Wing(1950)研究过．对于 10-8(1) 的雅可

比多項式，Pollard 証明了当

(5)　$\alpha \geqslant -\frac{1}{2},\ \beta \geqslant -\frac{1}{2}$

及

(6)　$4\max\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha+3},\ \frac{\beta+1}{2\beta+3}\right) < p < 4\min\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha+1},\ \frac{\beta+1}{2\beta+1}\right)$

时，它在 L_w^p 中的收斂性．对于盖根堡多項式，有 10-9 (1)，当

(7)　$\lambda > 0,\ \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} < p < \frac{2\lambda+1}{\lambda}$

时，它在 L_w^p 中收斂．最后，对于勒上特多項式 $w(x)=1$，則当

(8)　$\frac{4}{3} < p < 4$

时，它在 L_w^p 中收斂．

在 10-2 節中已指出，無限的区間將引起附加的困难．不过，对于 $\alpha > -1$ 的拉甘尔多項式及对于漢米特多項式，則曾証明它們在 $p=2$ 时仍在 L_w^p 中收斂．

我們称級数(3)在一个固定的 x 下，或在一区間上收斂于 $f(x)$ 是指在这一固定的 x 下，或在这一区間上的所有 x 上，只要 $n\to\infty$ 都有

$$s_n(x)\to f(x),$$

这里 $s_n(x)$ 仍然代表級数 (3) 的第 n 个部分和．这种收斂型（有时称为"点态收斂"）較之 L_w^p 中的收斂需要对 $f(x)$ 加更多的限制性假設．

Rau (1950) 曾研究过函数 $f(x)$ 展开为 $\alpha > -1,\ \beta > -1$ 的雅可比多項式級数的收斂問題．假設 $f(x)$ 是連續的，并具有分段連續導数，他曾証明展开式在每一区間 $-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon,\ \varepsilon > 0$ 上一致收斂于 $f(x)$．

拉甘尔多項式級数的阿培耳 (Abel) 可和性曾由 Caton 及 Hille (1945) 用拉普拉斯積分研究过．

类似像 10-14 (1), (7), (10) 及 10-15 (1), (18) 的漸近公式,提供了正交展开式的收斂与某些有关富里哀級数收斂之間的关系. 这就是同等收斂性定理的根源. 我們在这里提出一个勒上特多項式的同等收斂性定理 (Haar, 1918) 作为例子.

設 $|f(x)|^2$ 在区間 $(-1, 1)$ 上可積,幷設 $s_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 展开为勒上特多項式的展开式中第 n 个部分和, $\sigma_n(\theta)$ 为 $f(\cos\theta)$ 展开为富里哀余弦級数中的第 n 个部分和,則当 $n\to\infty$ 时,

$$s_n(\cos\theta) - \sigma_n(\theta) \to 0 \qquad 0<\theta<\pi.$$

这样的同等收斂性定理,連同富里哀級数收斂的条件,就可用以討論正交展开式的收斂. 雅可比,拉甘尔,漢米特多項式的同等收斂性定理見 Szegö (1939, 第 9 章). 斯高还提出了有关于这些級数在基礎区間二端的性态的一些結果.

解析函数展开式的問題稍有不同. 雅可比多項式級数在以 ±1 为焦点的橢圓內收斂,而每一个在这样一个橢圓內解析的函数都可以在橢圓內展开为雅可比多項式 $(\alpha, \beta>-1)$ 級数. 任一在这样的一个橢圓外解析而在無窮远处等于零的函数,可在其解析的区域內展开为第二类雅可比函数 $Q_n^{(\alpha,\beta)}$ 的級数 $(\alpha, \beta>-1$, 見 Szegö 9-2 節).

在拉甘尔多項式的情形下,收斂区域是正实軸上的一个拋物綫,其焦点在原点; 漢米特多項式級数的收斂区域是以实軸为中心綫的一条帶. 在这二种情形中,收斂区域都是無界的. 因此,要展开为拉甘尔或漢米特多項式級数的解析函数除了在適当区域上应为解析的之外,还应满足一定的滋長条件. 展开为拉甘尔多項式級数的問題曾由 Pollard (1947 a) 研究过,展开为漢米特多項式級数的問題由 Giuliotto (1939) 及 Hille (1939, 1939 a, 1940) 研究过.

10-20. 展开例子

在这一節里,我們將列出一些正交多項式級数,它的和可以寫成閉合形式. 除了勒上特,漢米特,拉甘尔多項式的情形之外,其

他这样的級数还是不很知道的，但在下面所举特列柯米提出的几个例子却可以弥补这一缺口．这样一个展开式的系数是根据 10–19 (2) 來計算的，这里常可应用罗特列恰公式(或其推廣式)，用 10–7 節第二段所講的分部積分法來簡化積分手續．

在下面这些公式中，有关于合流超比函数及有关函数的記法，已在本書第 6, 8, 9 各章介紹过，不另説明．

雅可比多項式級数

記法見10–8 節．我們总假設 $\alpha, \beta > -1$, h_n 的定义見10–8(4).

(1) $$\operatorname{sgn} x = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n h_n} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(0) P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad -1<x<1.$$

此处

(2) $$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{如 } x>0, \\ -1 & \text{如 } x<0, \end{cases}$$

且

$$c_0 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} 2^{-\alpha-\beta-1} \int_0^1 [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta - (1+x)^\alpha (1-x)^\beta]\, dx.$$

注意：在 (1) 式的和式中，实际只有对应于 n 的奇数值的項．

(3) $$(1-x)^\rho = 2^\rho \Gamma(\alpha+\rho+1) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(-\rho)_n}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+\rho+2)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$-\rho < \min(\alpha+1, \tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{3}{4}), \quad -1<x<1.$$

(4) $$e^{ixy} = (2iy)^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} M_{k,m}(2iy) P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad -1<x<1,$$

其中

$$k = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta), \quad m = n+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1).$$

母函数見 10-8 (29); 双綫性母函数見 Watson (1934), Erdélyi (1937 a) 及 Bailey; 其他展开为雅可比多項式積的展开式, 見 Bateman (1904, 1905).

盖根堡多項式級数

記法見 10-9. 常数 h_n 的定义見 10-9 (7).

(5) $$\operatorname{sgn} x = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda)_{m+1}}{(2m+1)(2m+2\lambda+1)\, m!\, h_{2m+1}} C_{2m+1}^{\lambda}(x),$$
$$\lambda > -\tfrac{1}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

(6) $$(1-x)^{\rho} = 2^{2\lambda+\rho} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\lambda)\, \Gamma(\lambda+\rho+\tfrac{1}{2}) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\lambda)(-\rho)_n}{\Gamma(n+2\lambda+\rho+1)} C_n^{\lambda}(x), \qquad -1 < x < 1,$$

如 $\lambda \geqslant 0$, 則 $-\rho < \tfrac{1}{2}(\lambda+1)$, 如 $-\tfrac{1}{2} < \lambda \leqslant 0$, 則 $-\rho < \tfrac{1}{2} + \lambda$.

(7) $$e^{ixy} = \Gamma(\lambda)(\tfrac{1}{2}y)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (n+\lambda) J_{n+\lambda}(y)\, C_n^{\lambda}(x),$$
$$-1 < x < 1, \ \lambda > 0.$$

(8) $$(y \sin\phi \sin\theta)^{\frac{1}{2}-\lambda} J_{\lambda-\frac{1}{2}}(y \sin\phi \sin\theta)\, e^{iy \cos\phi \cos\theta}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}} y^{-\lambda} \Gamma(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{n!\,(n+\lambda)}{(2\lambda)_n \Gamma(2n+\lambda)}$$
$$\times J_{n+\lambda}(y)\, C_n^{\lambda}(\cos\phi)\, C_n^{\lambda}(\cos\theta), \qquad 0 < \phi, \ \theta < \pi, \ \lambda > 0.$$

(9) $$\omega^{-\lambda} \mathscr{C}_{\lambda}(\omega) = 2^{\lambda} \Gamma(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)\, z^{-\lambda} Z^{-\lambda} \times J_{n+\lambda}(z)\, \mathscr{C}_{n+\lambda}(Z)\, C_n^{\lambda}(\cos\phi),$$

其中
$$|ze^{\pm i\phi}| < |Z|, \quad \omega^2 = z^2 + Z^2 - 2zZ\cos\phi,$$
且
$$\mathscr{C}_{\lambda}(\omega) = c_1 J_{\lambda}(\omega) + c_2 J_{-\lambda}(\omega)$$
是沙湼及華特生(Watson, 1922, 3-9 節)所提出的任一柱面函数. 如 $c_2 = 0$, 則所加于 z, Z 的限制可以取銷.

展成盖根堡多項式級数的公式有几个已在 10-9 節中提出; 关于双綫性母函数可参看華特生 (1933, b).

勒上特多項式級数

記法見 10–10 節．常数 g_n 由 10–10 (4) 式定义．所有展开式除另有說明者外，都在 $-1<x<1$，或 $0<\theta<\pi$ 的条件下有效．

(10) $$|x|^\rho=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m+\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}\rho)_m}{(\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2})_{m+1}}P_{2m}(x),\qquad \rho>-1.$$

(11) $$|x|^\rho\operatorname{sgn}x=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+\tfrac{3}{2})\frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho)_m}{(1+\frac{1}{2}\rho)_{m+1}}P_{2m+1}(x),\qquad \rho>-1.$$

(12) $$(1-x)^\rho=2^\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n+\rho+1}\frac{(-\rho)_n}{(1+\rho)_n}P_n(x),\qquad \rho>-\tfrac{3}{4}.$$

(13) $$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\pi\left[\tfrac{1}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4m+1}{(2m-1)(2m+2)}g_m^2P_{2m}(x)\right].$$

(14) $$\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\phi i}[\cos^2(\tfrac{1}{2}\phi)-\cos^2(\tfrac{1}{2}\theta)]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in\phi}P_n(\cos\theta),\qquad 0\leqslant\phi<\theta<\pi.$$

(15) $$\ln[1+\csc(\tfrac{1}{2}\theta)]=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}P_n(\cos\theta).$$

在(7)，(8) 及 (9) 中令 $\lambda=\frac{1}{2}$，可導出包含貝塞尔函数的級数．母函数見 10–10 (v) 及 (viii)．

拉甘尔多項式級数

記法見 10–12 節．恆設 $\alpha>-1$，$x>0$．

(16) $$x^\rho=\Gamma(\alpha+\rho+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\rho)_n}{\Gamma(\alpha+n+1)}L_n^\alpha(x),\qquad -\rho<1+\min(\alpha,\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{4}).$$

(17) $$\psi(\alpha+1)-\ln x=\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha+n+1)}L_n^\alpha(x).$$

(18) $$-e^{x+y}\operatorname{Ei}[-\max(x, y)]=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}L_n(x)L_n(y),\qquad x, y>0.$$

(19) $$e^x x^{-\alpha}\Gamma(\alpha, x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}L_n^{\alpha}(x).$$

(20) $$e^{x+y}(xy)^{-\alpha}\Gamma[\alpha, \max(x, y)]\gamma[\alpha, \min(x, y)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)(\alpha)_{n+1}}L_n^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(y).$$

(21) $$(xy)^{-\alpha}e^{x+y}\{\Gamma[\alpha, \max(x, y)]-\Gamma(\alpha, x)\Gamma(\alpha, y)/\Gamma(\alpha)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(y),\qquad x, y>0.$$

(22) $$e^{\min(x,y)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}[L_n(x)-L_{n-1}(x)][L_n(y)-L_{n-1}(y)].$$

(23) $$(xy)^{-\frac{1}{2}\alpha}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}e^{-\alpha\pi i}\gamma[\alpha, e^{i\pi}\min(x, y)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(y),\qquad \operatorname{Re}\alpha>0.$$

(24) $$\frac{\Gamma(\alpha+1, x)}{\Gamma(\alpha+1)}-H(x-y)=y^{\alpha+1}e^{-y}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha+n+1)}L_{n-1}^{\alpha+1}(y)L_n^{\alpha}(x),\qquad 0<x, y.$$

在 (24) 式中，$H(z)=0, \frac{1}{2}, 1$ 根据 $z<0, =0, >0$ 而取.

(25) $$x^{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}y^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}e^y J_{\alpha+\beta}[2(xy)^{\frac{1}{2}}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}L_n^{\alpha}(x)L_n^{\beta-n}(y).$$

(26) $$\Gamma(\alpha)\Psi(\alpha, \alpha+1; x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-1}L_n^{\alpha}(x),\qquad \alpha<\tfrac{1}{2}.$$

(27) $$(1-y)^{-\alpha}\Phi\left(\alpha, c; \frac{xy}{y-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(c)_n}y^n L_n^{c-1}(x),\qquad x>0,\ |y|<1,\ c>0.$$

拉甘尔多項式的其他級数，見 10-12(v) 及 (vii). 展开式 10-14(11) 在 β 为一整数且 $\geqslant -n$ 时，就是一拉甘尔多項式級数.

漢米特多項式級数

記法見 10–13 節

(28) $$|x|^{\rho}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho)}{\pi^{\frac{1}{2}}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{(-\frac{1}{2}\rho)_{m}}{(2m)!}H_{2m}(x),\ \rho>-1.$$

(29) $$|x|^{\rho}\operatorname{sgn}x=\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}\rho)}{\pi^{\frac{1}{2}}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho)_{m}}{(2m+1)!}H_{2m+1}(x),$$
$$\rho>-1.$$

(30) $$\pi^{\frac{1}{2}}\operatorname{Erfi}[\min(x,y)]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_{2m+1}(x)\,H_{2m+1}(y)}{2^{2m+1}(2m+1)(2m+1)!},$$
$$x,\ y\geqslant 0.$$

(31) $$\exp(\tfrac{1}{4}x^{2})\,D_{2\nu}(x)=\frac{2^{\nu}}{\Gamma(-\nu)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}H_{2m}(2^{-\frac{1}{2}}x)}{(m-\nu)2^{2m}m!}.$$

(32) $$\exp(\tfrac{1}{4}x^{2})\,D_{2\nu+1}(x)=\frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}H_{2m+1}(2^{-\frac{1}{2}}x)}{(m-\nu)2^{2m+1}m!}.$$

(33) $$(1+y)^{-\alpha}\Phi\left(\alpha,\ \tfrac{1}{2};\ \frac{x^{2}y}{1+y}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m}}{(2m)!}y^{m}H_{m}(x),\quad |y|<1.$$

(34) $$2x(1+y)^{-\alpha}\Phi\left(\alpha,\ \frac{3}{2};\ \frac{x^{2}y}{1+y}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m}}{(2m+1)!}y^{m}H_{2m+1}(x).$$

別的漢米特多項式級数見 10–13 (v).

下面我們說明这些公式的來源;其中也說明了有些公式要參考到經典多項式無窮級数方面的資料.

雅可比多項式級数

系数用分部積分法計算出來. 其他例子見 Brafman (1951).

(5) 从 (1) 用 10–9 (4) 導出

(6) 从 (3) 用 10–9 (4) 導出

(7) 从 (4) 用 10–9 (4) 導出, Watson (1922, p. 368).

(8) Watson (1922, p. 370)

(9) Watson (1922, p. 365)

勒上特多項式級数

有很多例子可从雅可比多項式級数或盖根堡多項式級数中应用公式 10-10 (3) 導出. 其他的許多例子可参看勒上特函数的專著. 有些例子可参看 Tricomi (1936, 1939-40).

(16)	Tricomi (1948, p. 332)
(17)	Toscano (1949)
(18)	Neumann (1912)
(19)	9-4 (5)
(20)	9-4 (4)
(21)	Watson, (1938)
(22)	Tricomi (1935), Doetsch (1935)
(23)	Erdélyi (1936)
(24)	Tricomi (1948)
(25)	Toscano (1949)
(26)	6-12 (3)
(27)	6-12 (5)

拉盖尔多項式級数的一些例子,見 Erdélyi (1937, 1938).

(28), (29)	从 (16) 用 10-13 (2) 及 (3) 導出
(30)	从 (3) 用 10-13 (2) 及 (3) 導出
(31), (32)	Tricomi (1950 a)
(33), (34)	从 (27) 用 10-13 (2) 及 (3) 導出.

10-21. 正交多項式的某些类

除了經典正交多項式之外,还有很多类特殊正交多項式,它們都曾被人詳細研究过. 在这一節里,我們將略提其中的几个,对于斯高著作中已有的那些,我們只作概略的介紹,对于那些尙不易遇見的多項式,則作較为詳細的說明.

S. 勃司丁及 G. 斯高多項式

这些多項式属于区間 $(-1, 1)$，它們的权函数 $w(x)$ 取如下形式之一

$$(1-x^2)^{-1/2}[\rho(x)]^{-1},\quad (1-x^2)^{1/2}[\rho(x)]^{-1},$$
$$[(1-x)/(1+x)]^{1/2}[\rho(x)]^{-1},$$

其中 $\rho(x)$ 恰为 l 次的多項式，在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上为正．克列司托費耳公式 10-3 (12) 提供了这些多項式与某些雅可比多項式之間的一个关系．

这些多項式是由斯高 (1921) 所發現并由勃司丁 (1930, 1932) 深入研究．見 Szegö (1939, 2-6 節)．

E. 希英及 N. 阿却才多項式

希英多項式属于区間 $(0, a)$，它的权函数为

(1) $$w(x)=[x(a-x)(b-x)]^{-1/2},\qquad 0<a<b.$$

它与雅可比橢圓函数有关．

希英 (1878-1881, 第一册, p. 294-296) 証明 n 次多項式滿足下面形式的微分方程

(2) $$2\psi(x)(x-\gamma)\frac{d^2y}{dx^2}+[(x-\gamma)\psi'(x)-2\psi(x)]\frac{dy}{dx}$$
$$+[\alpha+\beta x-n(2n-1)x^2]y=0,$$

其中

$$\psi(x)=x(a-x)(b-x),$$

且 α, β, γ 为一定的常数．这一微分方程有四个正則型奇点，因此是 Heun 方程类型的．

阿却才 (1934) 研究了区間 $(-1, 1)$ 上的正交多項式，所連帶的权函数为

$$w(x)=\begin{cases}|c-x|[(1-x^2)(a-x)(b-x)]^{-1/2}, & -1<x<a,\text{或}b<x<1.\\ 0, & a<x<b.\end{cases}$$

此处 $-1<a<b<1$, c 依賴于 a 及 b. 这些多項式也与橢圓函数有关.

F. 普拉齐克多項式

最近, F. 普拉齐克定义了某些族正交多項式, 它們都是經典正交多項式的推廣. 普拉齐克多項式的权函数并不能滿足于習慣上在一般理論中所加施的某些条件(粗略地說, 它在区間的二端消失得太强), 因此, 这些多項式是正交多項式一般理論中不难遇到的某些"不規則"現象的重要例子.

有限区間 設 a, b, λ 都是实参数, $a\geqslant|b|$, $\lambda>-1$. 令

$$(3)\qquad -1\leqslant x=\cos\theta\leqslant 1, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

并采用簡記符号

$$(4)\qquad t=(a\cos\theta+b)/\sin\theta=(ax+b)(1-x^2)^{-1/2}.$$

多項式 $P_n^\lambda(x;a,b)$ 可依次定义为

$$(5)\qquad P_{-1}^\lambda=0,\quad P_0^\lambda=1.$$

$$(6)\qquad nP_n^\lambda-2[(n-1+\lambda+a)x+b]P_{n-1}^\lambda+(n+2\lambda-2)P_{n-2}^\lambda=0, \qquad n=1, 2, \cdots$$

这些多項式系由普拉齐克 ($\lambda=1/2$ 的情形見 1949 a, $\operatorname{Re}\lambda>0$ 見 1949 c) 所定义, 并由斯高 (1950 a)所研究. 有儿个有关多項式也曾由普拉齐克 (1949 b, 1950 a) 研究过.

以 z^n 乘 (6) 式并相加, 可得母函数的一个簡單的一階微分方程, 因此

$$(7)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}P_n^\lambda(x;a,b)z^n=(1-ze^{i\theta})^{-\lambda+it}(1-ze^{-i\theta})^{-\lambda-it}, \quad |z|<1.$$

与 10-9 (29) 及 10-10 (39) 式比較就可看出它們与蓋根堡及勒上特多項式的关系为

(8) $P_n^\lambda(x;0,0)=C_n^\lambda(x),\ P_n^{1/2}(x;0,0)=P_n(x).$

这些多项式是区間 (4) 上的正交系，权函数为

(9) $w^{(\lambda)}(x;a,b)=\pi^{-1}2^{2\lambda-1}e^{(2\theta-\pi)t}(\sin\theta)^{2\lambda-1}|\Gamma(\lambda+it)|^2.$

$P_n^{1/2}(x;a,b)$ 在 x 固定于 -1 及 1 之間而 $n\to\infty$ 时的漸近性态曾由斯高研究过.

或者从母函数 (7)，或者从遞推关系 (6) 都可以証明

(10) $n!\,P_n^\lambda(x;a,b)=(2\lambda)_n e^{in\theta}{}_2F_1(-n,\lambda+it;2\lambda;1-e^{-2i\theta}).$

这一以超比級数表示的表达式是普拉齐克多項式的其他許多公式的來源. 应当指出，t 依賴于 x，因此 P_n^λ 并不滿足任何微分方程. 不同 λ 值的 P_n^λ 之間的联系公式可从 (10) 式得出，犹似合流超比級数之間的关系式一样.

普拉齐克在后來的著作(1950c)中引入了更普遍的多項式系，依賴于实参数 a,b,c,λ，其中

(11) $a>|b|,\ 2\lambda+c>0,\ c\geqslant 0$

或 $a>|b|,\ 2\lambda+c\geqslant 1,\ c>-1.$

用 (3) 及 (4) 的記法，$P_n^\lambda(x;a,b,c)$ 滿足

(12) $P_{-1}^\lambda=0,\ P_0^\lambda=1.$

(13) $$(n+c)P_n^\lambda-2[(n-1+\lambda+a+c)x+b]P_{n-1}^\lambda$$
$$+(n+2\lambda+c-2)P_{n-2}^\lambda=0,\qquad n=1,2,\cdots$$

这些多項式的母函数也由普拉齐克得出，他还証明这些多項式是区間 (4) 上的正交系，权函数为

(14) $$w^{(\lambda)}(x;a,b,c)=\frac{(2\sin\theta)^{2\lambda-1}e^{(2\theta-\pi)t}}{2\pi\Gamma(2\lambda+c)\Gamma(c+1)}\cdot$$
$$\times|\Gamma(\lambda+c+it)|^2|{}_2F_1(1-\lambda+it,c;c+\lambda+it;e^{2i\theta})|^{-2}.$$

遞推关系(13)是 P 作为 n 的函数的一个差分方程. 根据这一方程，就可將 $P_n^\lambda(x;a,b,c)$ 用超比函数來表示. 这个表达式是非常复什的，而且其中的超比級数不再是多項式. 令

$$A_n=\frac{\Gamma(2\lambda+c+n)}{\Gamma(c+n+1)\Gamma(2\lambda)}e^{i(c+n)\theta}{}_2F_1(-c-n,\lambda+it;2\lambda;1-e^{-2i\theta}),$$

$$B_n=\frac{\Gamma(1-\lambda+it)\Gamma(1-\lambda-it)}{\Gamma(2-2\lambda)}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\exp[i(2\lambda+c+n-1)\theta]$$

$$\times{}_2F_1(1-2\lambda-c-n,1-\lambda+it;2-2\lambda;1-e^{-2i\theta})$$

所得的表达式为

(15) $$P_n^\lambda(x;a,b,c)=\frac{A_{-1}B_n-A_nB_{-1}}{A_{-1}B_0-A_0B_{-1}}.$$

在这种形式下,它在 2λ 不是整数时正确. 另一个对 2λ 为整数时正确的形式也是可用的. 当 $c=0$ 时 $A_{-1}=0$, 这时 (15) 式簡化为 (10).

無限区間. 对于無限区間 $-\infty<x<\infty$, 普拉齐克 (1950 b) 提出了多項式 $P_n^\lambda(x;\varphi)$ 系,其中参数

(16) $\lambda>0,\ 0<\varphi<\pi.$

(17) $P_{-1}^\lambda=0,\ P_0^\lambda=1.$

(18) $$nP_n^\lambda-2[(n-1+\lambda)\cos\varphi+x\sin\varphi]P_{n-1}^\lambda+(n-2+2\lambda)P_{n-2}^\lambda=0,\qquad n=1,2,\cdots$$

很明顯,这些多項式可从(6)式所定义的多項式中以 φ 代 θ 以 x 代 t 而得出. 母函数为

(19) $$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^\lambda(x;\varphi)z^n=(1-ze^{i\varphi})^{-\lambda+ix}(1-ze^{-i\varphi})^{-\lambda-ix},\qquad |z|<1.$$

权函数为

(20) $$w^{(\lambda)}(x;\varphi)=\pi^{-1}(2\sin\varphi)^{2\lambda-1}e^{-(\pi-2\varphi)x}|\Gamma(\lambda+ix)|^2.$$

这些多項式也可用超比級数表示为如下形式

(21) $$n!\,P_n^\lambda(x;\varphi)=(2\lambda)_n e^{in\varphi}{}_2F_1(-n,\lambda+ix;2\lambda;1-e^{-2i\varphi}).$$

这些多項式由米克斯奈(1934)及亨(1949)所提出. 他們給出了一个以有限差分表示的公式,类似于罗特列恰公式 (Toscano, 1949). 置

$$\delta F(x)=F(x+\tfrac{1}{2}i)-F(x-\tfrac{1}{2}i),$$

$$\delta^kF(x)=\delta[\delta^{k-1}F(x)],\qquad k=2,3,\cdots$$

于是有

$$(22)\qquad P_n^{\lambda}(x;\varphi)=\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\delta^n G(\lambda+\tfrac{1}{2}n,\,x)}{G(\lambda,\,x)},$$

其中

$$G(\lambda,\,x)=\frac{\Gamma(\lambda+ix)}{\Gamma(1-\lambda+ix)}e^{2\varphi x}.$$

10-22. 离散变量的正交多項式

本章的下余几節里，我們將簡略地列出几种正交多項式系，其中，10-1 節的分布函数 $a(x)$ 是一跳躍函数，标積的定义可用 10-1 (3)．$a(x)$ 跳躍的点为 x_i，我們將用跳躍函数 $j(x)$，把 $a(x)$ 在 $x=x_i$ 上的跳躍記为 $j(x_i)$．因此，标積的定义可用

$$(1)\qquad (\varphi_1,\varphi_2)=\sum_i j(x_i)\,\varphi_1(x_i)\,\varphi_2(x_i),$$

跳躍函数大体上对应于前几節的权函数．我們还假設跳躍函数是正的，且 $\sum_i j(x_i)$ 是有限的．本章前几節中的許多結果对 10-1(2) 形的标積有效，因此对标積的定义 (1) 也正确．

我們將把 x_i 作为整数，$a\leqslant x_i\leqslant b$．下面表上列出的区間和跳躍函数是比較最常見的．与它們連帶的正交多項式对应于离散变量的經典正交多項式，其中有很多已詳細研究过．

一离散变量的多項式

a	b	$j(x)$	名　称
0	$N-1$	1	車比雪夫
0	N	$p^x q^{N-x}\binom{N}{x}$	克罗却克
0	∞	$\dfrac{e^{-a}a^x}{\Gamma(x+1)}$.	查　　萊
0	∞	$c^x\dfrac{(\beta)_x}{x!}$.	米克斯奈
0	∞	$\dfrac{(\beta)_x(\gamma)_x}{x!\,(\delta)_x}$.	W. 亨

所有这些多項式具有很多公有的性質，就中我們只提出类似于罗特列恰公式的有限差分

(2) $$p_n(x)=[K_n j(x)]^{-1}\Delta^n[j(x-n)X(x)X(x-1)\cdots \cdots X(x-n+1)],$$

其中 K_n 为一常数，$X(x)$ 为 x 的多項式，它的系数不依賴于 n，Δ 为前向差分算符：

(3) $$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x),\ \Delta^{n+1}f(x)=\Delta[\Delta^n f(x)], \qquad n=1, 2, \cdots$$

反之，这一性質是上面正交多項式的一个特征，凡是具有一罗特列恰公式的任一正交多項式系都可以轉化为上列系統之一（Hahn, 1949, Weber 及 Erdélyi 1952）．其証明与 10-6 節相仿，兹从略．

这些多項式的正交性質可用（2）及"分部求和法"來証明．此外，母函数方法也是可用的．

10-23. 一离散变量的車比雪夫多項式及其推廣

車比雪夫多項式 $t_n(x)$ 在用最小二乘法求数据修均（凝合）时会遇到．其性質見 Szegö (1939, 2-8 節), Jordan (1921 及 1947, 第 8 章）及其中所提到的参考文献．

定义及正交性質

(1) $$t_n(x)=n!\,\Delta^n\left[\binom{x}{n}\binom{x-N}{n}\right], \qquad n=0, 1, \cdots, N-1.$$

(2) $$\sum_{x=0}^{N-1} t_m(x)t_n(x)=(2n+1)^{-1}N(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots \cdots(N^2-n^2)\,\delta_{mn}, \qquad m, n=0, 1, \cdots, N-1.$$

对称性及"中心值"

(3) $$t_n(N-1-x)=(-1)^n t_n(x).$$

(4) $$t_{2m}(\tfrac12 N-\tfrac12)=(-1)^m(2m)!\binom{2m}{m}\binom{\tfrac12 N-\tfrac12+m}{m},$$

$$t_{2m+1}(\tfrac12 N-\tfrac12)=0.$$

差分方程

(5) $$(x+2)(x-N+2)\Delta^2 t_n(x)+[2x-N+3-n(n+1)]\Delta t_n(x) - n(n+1)t_n(x)=0.$$

遞推关系

(6) $$(n+1)t_{n+1}(x)-(2n+1)(2x-N+1)t_n(x) + n(N^2-n^2)t_{n-1}(x)=0, \qquad n=1, 2, \cdots$$

与勒上特多項式的关系

(7) $$\lim_{N\to\infty} N^{-n}t_n(Nx)=P_n(2x-1).$$

車比雪夫多項式的一个推廣可从下面的定义中得出

(8) $$p_n(x;\beta,\gamma,\delta)=\frac{1}{n!}\frac{x!(\delta)_x}{(\beta)_x(\gamma)_x}\Delta^n\left[\frac{(\beta)_x(\gamma)_x}{(x-n)!(\delta)_{x-n}}\right].$$

特別是

(9) $$p_n(x;1,\alpha+1,\alpha+1)=\frac{1}{n!}\Delta^n\left[\binom{x}{n}\binom{x+\alpha}{n}\right],$$

从这一形式立刻可以看出

(10) $$p_n(x;1,1-N,1-N)=t_n(x).$$

彼得曼所引出的某些多項式(1933)也是(8)的特例．多項式(8)是Hahn(1949)所提出．它屬于跳躍函数

(11) $$j(x;\beta,\gamma,\delta)=\frac{(\beta)_x(\gamma)_x}{x!(\delta)_x}.$$

顯式

(12) $$p_x(x;\beta,\gamma,\delta)=\frac{(\beta)_n(\gamma)_n}{n!}{}_3F_2(-n,-x,\beta+\gamma-\delta+n;\beta,\gamma;1).$$

还有一个遞推公式是韋勃及爱尔台里(1952)所提出．

它与雅可比多項式的关系为

(13) $$\lim_{\gamma\to\infty}\gamma^{-n}p_n(\gamma x;\alpha+1,\gamma;\gamma-\beta)=\binom{n+\alpha}{\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}(2x+1).$$

10-24. 克罗却克及有关多項式

与几率論中二項分布相連帶的正交多項式是由克罗却克(1929)所提出．由 Aitken 及 Gonin (1935) 加以研究，它們的各种性質可参看 Szegö (1939, 2-8-2 節)．

設

(1) $p>0,\ q>0,\ p+q=1,\ N$ 为正整数．

定义，跳躍函数，正交性質

(2) $$k_n(x)=\frac{(-1)^n x!\,(N-x)!}{n!\,p^x q^{N-x}}\Delta^n\left[\frac{p^x q^{N-x+n}}{(x-n)!\,(N-x)!}\right],$$
$$n=0,\ 1,\ \cdots,\ N.$$

(3) $$j(x)=\binom{N}{x}p^x q^{N-x}.$$

(4) $$\sum_{x=0}^{N} j(x)\,k_n(x)\,k_m(x)=\binom{N}{n}p^n q^n \delta_{mn},\quad m,\ n=0,\ 1,\ \cdots,\ N.$$

顯表示式，母函数

(5) $$k_n(x)=q^n\binom{x}{n}F(-n,\ x-N;\ x-n;\ -p/q).$$

(6) $$\sum_{n=0}^{N} k_n(x)\,z^n=(1+qz)^x(1-pz)^{N-x}.$$

顯表示式表明了它与雅可比多項式的关系；它与漢米特多項式的(極限的)关系及与查萊多項式的关系見 Szegö (1939, p, 35, 36)．

$p=q=1/2$ 的特殊情形，曾由 Gram (1882) 及 Greenleaf (1932) 研究过．

多項式

(7) $$m_n(x;\beta,\ c)=\frac{x!}{(\beta)_x}c^{-x-n}\,\Delta^n\left[\frac{c^x(\beta)_x}{(x-n)!}\right]$$

曾由 Meixner (1934), Gottlieb (1938, $\beta=1$) 及其他作者研究过

(見 Hahn, 1949, p. 32 中的参考文献). 它們是克罗却克多項式的推廣.

(8) $$p^n m_n(x; -N, -p/q) = n!\, k_n(x).$$

顯表示式, 跳躍函数, 正交性質

(9) $$m_n(x; \beta, c) = (\beta + x)_n F(-n, -x; 1-\beta-n-x; c^{-1})$$
$$= (\beta)_n F(-n, -x; \beta; 1-c^{-1}).$$

(10) $$j(x) = c^x (\beta)_x / x!$$

(11) $$\sum_{x=0}^{\infty} j(x) m_n(x; \beta, c) m_l(x; \beta, c) = n!\,(\beta)_n c^{-n}(1-c)^{-\beta}\delta_{nl},$$
$$\beta > 0,\ 0 < c < 1.$$

对称性, 母函数

(12) $$(\beta)_x m_n(x; \beta, c) = (\beta)_n m_x(n; \beta, c).$$

(13) $$\sum_{n=0}^{\infty} m_n(x; \beta, c)\frac{z^n}{n!} = \left(1 - \frac{z}{c}\right)^x (1-z)^{-x-\beta},$$
$$|z| < \min(1, |c|).$$

从顯表示可引出它与雅可比, 拉甘尔及查萊多項式的关系, 如下:

(14) $$m_n(x; \beta, c) = n!\, P_n^{(\beta-1, -\beta-n-x)}\left(\frac{2}{c} - 1\right).$$

(15) $$\lim_{c\to 1} m_n\left(\frac{cx}{c-1}; \beta, c\right) = n!\, L_n^{\beta-1}(x).$$

(16) $$\lim_{\beta\to\infty}\left[\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^n m_n\left(x; \beta, \frac{\alpha}{\beta}\right)\right] = n!\, L_n^{x-n}(\alpha)$$
$$= (-\alpha)^n c_n(x; \alpha).$$

另外有一个遞推关系及一差分方程, 見 Meixner (1934).

10-25. 查莱多項式

查萊多項式是与几率理論中稀有事件的泊松分布相連帶的正交系．曾有很多学者研究过这一多項式，就中有 Meixner (1934, 1938) 及 Doetsch (1933)，有关于这一系的性質見 Szegö (1939, 2-8-1 節)及 Jordan (1947, 148 節)．

跳躍函数，定义，正交性質

(1) $$j(x)=e^{-\alpha}\alpha^{x}/x! \qquad \alpha>0,\ x=0,1,2,\cdots$$

(2) $$c_n(x;\alpha)=\frac{x!}{\alpha^x}\Delta^n\left[\frac{\alpha^{x-n}}{(x-n)!}\right].$$

(3) $$\sum_{x=0}^{\infty} j(x)c_m(x;\alpha)c_n(x;\alpha)=\alpha^{-n}n!\,\delta_{mn}.$$

顯表示式，母函数

(4) $$c_n(x;\alpha)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{x}{r}\frac{r!}{\alpha^r}$$

(5) $$c_n(x;\alpha)=\frac{x!\,(-\alpha)^{-n}}{(x-n)!}\Phi(-n,x-n+1;\alpha).$$

(6) $$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x;\alpha)\frac{z^n}{n!}=e^z\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^x \qquad |z|<\alpha.$$

一个双綫性母函数見 Meixner (1938).

对称性，遞推关系，差分方程

(7) $$c_n(x;\alpha)=c_x(n;\alpha).$$

(8) $$\alpha c_{n+1}(x;\alpha)+(x-n-\alpha)c_n(x;\alpha)+nc_{n-1}(x;\alpha)=0.$$

(9) $$\alpha c_n(x+1;\alpha)+(n-x-\alpha)c_n(x;\alpha)+xc_n(x-1;\alpha)=0.$$

从顯表示式 (5) 可得一与拉甘尔多項式的关系

(10) $$c_n(x;\alpha)=(-\alpha)^{-n}n!\,L_n^{x-n}(\alpha)$$

与米克斯奈多項式的关系，已在 10-24 (16) 中給出．

参考文献

Achyeser, N., 1934: *Comm. Inst. Sci. Math. Méc. Univ. Kharkoff (Zapiski Inst. Mat. Mech.)* (4) 9, 3-8.

Aitken, A. C. and H. T. Gonin, 1935: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 55, 114-125.

Bateman, Harry, 1904: *Messenger of Math.* 33, 182-188.

Bateman, Harry, 1905: *Proc. London Math. Soc.* (2) 3, 111-123.

Bateman, Harry, 1933: *Tohoku Math. J.* 37, 24-38.

Beckenbach, E. F., Wladimir Seidel and Otto Szász, 1951: *Duke J.* 18, 1-10.

Bernstein, S., 1930: *Comm. Soc. Math. Kharkoff* (4) 4, 79-93.

Bernstein, S., 1932: *Comm. Soc. Math. Kharkoff* (4) 5, 59-60.

Bochner, Salomon, 1929: *Math. Z.* 29, 730-736.

Brafman, Fred, 1951: *Proc. Amer. Math. Soc.* 2, 942-949.

Burchnall, J. L., 1951: *Proc. London Math. Soc.* (3) 1, 232-240.

Burchnall, J. L., 1952: *Quart. J. Math. Oxford* (2) 3, 151-157.

Caton, W. B. and Einar Hille, 1945: *Duke Math. J.* 12, 217-242.

Charlier, C. V. L., 1931: *Application de la théorie des probabilités al'astronomie*, Gauthier-Villars.

Cooper, R., 1950: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 46, 549-554.

Doetsch, Gustav, 1933: *Math. Ann.* 109, 257-266.

Doetsch, Gustav, 1935: *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (6) 22, 300-324.

Erdélyi, Arthur, 1936: *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (6) 24, 347-350.

Erdélyi, Arthur, 1937: *Math. Z.* 42, 641-670.

Erdélyi, Arthur, 1937 a: *J. London Math. Soc.* 12, 56-57.

Erdélyi, Arthur, 1938: *Akad. Wiss. Wien. S.-B. II a* 147, 513-520.

Forsythe, G. E., 1951: *Duke J.* 18, 361-371.

Gatteschi, Luigi, 1949: *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 4, 240-250.

Gatteschi, Luigi, 1949 a: *Rend. Mat. e applicazioni Roma* (5) 8, 399-411.

Geronimus, J., 1944: *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.* (N.S.) 44, 355-359.

Giuliotto, Virgilio, 1939: *Ist. Lombardo, Rend.* 72, 37-57.

Gottlieb, M. J., 1938: *Amer. J. Math.* 60, 453-458.

Gram, J. P., 1882: *J. Math.* 114, 41-73.

Greenleaf, H. E. H., 1932: *Ann. Math. Statistics* 3, 204-255.

Greenwood, R. E. and J. J. Miller, 1948: *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, 765-769.

Haar, Alfred, 1918: *Math. Ann.* 78, 121-136.

Hahn, Wolfgang, 1934: *Jber. Deutsch. Math. Verein* 44, 215-236.

Hahn, Wolfgang, 1935: *Math. Z.* 39, 634-638.

Hahn, Wolfgang, 1949: *Math. Nachr.* 2, 4-34.

Heine, Emil, 1878-1881: *Handbuch der Kugelfunktionen*, second edition, Riemer, Berlin.

Hille, Einar, 1939: *C. R. Acad. Sci. Paris* 209, 714-716.

Hille, Einar, 1939 a: *Duke Math. J.* 5, 875-936.

Hille, Einar, 1940: *Trans. Amer. Math. Soc.* 47, 80-94.

Hobson, E. W., 1931: *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge.

Jordan, Charles, 1921: *Proc. London Math. Soc.* 20, 297-325.

Jordan Charles, 1947: *Calculus of finite differences*, Chelsea Publishing Co.

Kaczmarz, Stefan and Hugo Steinhaus, 1935: *Theorie der Orthogonalreihen*, Warsaw.

Krawtchouk, M., 1929: *C. R. Acad. Sci. Paris* 189, 620-622.

Krall, H. L., 1936: *Bull. Amer. Math. Soc.* 42, 423-428.

Lowan, A. N., Norman Davids and Arthur Levenson, 1942: *Bull. Amer. Math. Soc.* 48, 739-743.

Lowan, A. N., Norman Davids and Arthur Levenson, 1943: *Buli. Amer. Math. Soc.* 49, 939.

Madhava Rao, B. S. and V. R., Thiruvenkatachar, 1949: *Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A* 29, 391-393.

Magnus, Wilhelm and Fritz Oberhettinger, 1948: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik*, Springer, Berlin.

Meixner, Joseph, 1934: *J. London Math. Soc.* 9, 6-13.

Meixner, Joseph, 1938: *Math. Z.* 44, 531-535.

Myller-Lebedeff, Wera, 1907: *Math. Ann.* 64, 388-416.

Neumann, Richard, 1912: *Die Entwicklung willkürlicher Funktionen noch den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen auf Grund der Theorie der Integralgleichungen*, Breslau.

Pollaczek, Felix, 1949 a: *C. R. Acad. Sci. Paris* 228, 1363-1365.

Pollaczek, Felix, 1949 b: *C. R. Acad. Sci. Paris* 228, 1553-1556.

Pollaczek, Felix, 1949 c: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228, 1998-2000.

Pollaczek, Felix, 1950 a: *C. R. Acad. Sci. Paris* 230, 36-37.

Pollaczek, Felix, 1950 b: *C. R. Acad. Sci. Paris* 230, 1563-1565.

Pollaczek, Felix, 1950 c: *C. R. Acad. Sci. Paris* 230, 2254-2256.

Pollard, Harry, 1946: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 32, 8-10.

Pollard, Harry, 1947: *Trans. Amer. Math. Soc.* 62, 387-403.

Pollard, Harry, 1947 a: *Ann. of Math.* (2) 48, 358-365.

Pollard, Harry, 1948: *Trans. Amer. Math. Soc.* 63, 355-367.

Pollard, Harry, 1949: *Duke Math. J.* 16, 189-191.

Rau, Heinz, 1950: *Arch. Math.* 2, 251-257.

Salzer, H. E. and Ruth Zucker, 1949: *Bull. Amer. Math. Soc.* 55, 1004-1012.

Sansone, Giovanni, 1949: *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 4, 221-223 and 339-341.

Sansone, Giovanni, 1950: *Math. Z.* 53, 97-105.

Sansone, Giovanni, 1950 a: *Math. Z.* 52, 593-593.

Seidel, Wladimir and Otto Szász, 1951: *J. London Math. Soc.* 26, 36-41.

Shohat, J. A., Einar Hille and J. L. Walsh, 1940: *A bibliography on orthogonal Polynomials*, Washington.

Shohat, J. A. and J. D. Tamarkin, 1943: *The Problem of moments*, Mathematical Surveys 1, New York.

Sonine, N., 1880: *Math. Ann.* 16, 1-80.

Spencer, V. E., 1937: *Duke Math. J.* 3, 667-675.

Szász, Otto, 1950: *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 5, 125-127.

Szász, Otto, 1950 a: *Proc. Amer. Math. Soc.* 1, 256-267.

Szász, Otto, 1951: *J. d'Analyse Math.* 1, 116-134.

Szegö, Gábor, 1921: *Math. Z.* 12, 61-94.

Szegö, Gábor 1933: *Proc. London Math. Soc.* (2) 36, 427-450.

Szegö, Gábor, 1939: *Orthogonal polynomials*. New York.

Szegö, Gábor, 1948: *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, 401-405.

Szego, Gábor, 1950: *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 5, 120-121.

Szegö, Gábor, 1950 a: *Proc. Amer. Math. Soc.* 1, 731-737.

Todd, John, 1950: *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 5, 122-125.

Toscano, Letterio, 1949: *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 4, 398-409.

Tricomi, Francesco, 1935: *Boll. Un. Mat. Ital.* 14, 213-218; 277-282.

Tricomi, Francesco, 1935 a: *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (6) 21, 332–335.

Tricomi, Francesco, 1936: *Boll. Un. Mat. Ital.* 15, 102–105.

Tricomi, Francesco, 1939–40: *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* 75, 369–390.

Tricomi, Francesco, 1941: *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 12, 14–33.

Tricomi, Francesco, 1947: *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 26, 283–300

Tricomi Francesco, 1948: *Serie Ortogonali di Funzioni*, Torino.

Tricomi, Francesco, 1948 a: *Equazioni differenziali*, Torino.

Tricomi, Francesco, 1949: *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 28, 263–289.

Tricomi, Francesco, 1950: *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 31, 93–97.

Uspensky, J. V., 1927: *Ann. of Math.* (2) 28, 593–619.

Vitali, Giuseppe and Giovanni Sansone, 1946: *Moderna Teoriadelle Funzioni di Variabile Reale*, parte seconda, Bologna.

Watson, G. N., 1922: *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge.

Watson, G. N., 1933: *J. London Math. Soc.* 8, 189–192.

Watson, G. N., 1933 a: *J. London Math. Soc.* 8, 194–199.

Watson, G. N., 1933 b: *J. London Math. Soc.* 8, 289–292.

Watson, G. N., 1934: *J. London Math. Soc.* 9, 22–28.

Watson, G. N., 1938: *Akad. Wiss. Wien. S.-B. IIa* 147, 151–159.

Weber, Maria and Arthur Erdélyi, 1952: *Amer. Math. Monthly*, 59, 163–168.

Whittaker, E. T. and G. N. Watson, 1940: *A course ofmodern analysis*, Cambridge.

Wing, G. Milton, 1950: *Amer. J. Math.* 72, 792–808.

第十一章　球面及超球面调和多項式[1]

11-1. 前言

11-1-1. 矢量

我們將用矢量

(1)　$\mathfrak{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_{p+2})$,　　$p=1, 2, 3, \cdots$

來定义欧氏 $(p+2)$ 維空間的一点，并把 $x_1, x_2, \cdots, x_{p+2}$ 的一个函数 u 記为 $u(\mathfrak{x})$. 矢量 $\mathfrak{x}$ 的長度記为 $\|\mathfrak{y}\|$ 或 r. 顯然:

$$\|\mathfrak{x}\|=r=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{p+2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

在 11-7 節中，我們既有三个分量組成的矢量，也有四个分量組成的矢量．因此，我們以 $\|\mathfrak{x}\|_3$ 及 $\|\mathfrak{y}\|_4$ 分別表示矢量 $\mathfrak{x}$ 及 $\mathfrak{y}$ 的分量的数目．

在 $(p+2)$ 維空間的單位超球面 Ω, 卽超曲面 $r=1$ 上的一点可用單位矢量

(2)　$\xi=r^{-1}\mathfrak{x}=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p+2})$

來定义．我們將用字母 ξ, η, ζ 表示具有 $p+2$ 个分量的單位矢量．

如果 $\mathfrak{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_{p+2})$ 是第二个矢量，則两矢 $\mathfrak{x}$ 及 $\mathfrak{y}$ 的內乘積將記为

(3)　$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{p+2}y_{p+2}$.

对于相交成 θ 角的二單位矢量 ξ, η, 則有 $(\xi, \eta)=\cos\theta$.

今后我們將要遇到矩陣(卽应用于矢量的綫性算符)．有关矩陣的全部定义及其理論的概要，可參看 Birkhoff 及 MacLane

---

[1] 在編寫这一章的时候，我們采用了 G. Herglotz 的一本尙未印出的原稿上的材料．本節中的很多証明方法及編排都是根据他这一本書的．

(1947). 这里我們將只应用方陣. 設 M 为具有一般元素 $\mu_{jk}(j, k=1, 2, \cdots, p+2)$ 的矩陣，則 M 的行列式將記为

$$\det M = \det \mu_{jk}.$$

我們把單位矩陣記为 I; 如果对于一个矩陣 O 有

$$(4)\qquad O'O = I$$

其中 O' 为矩陣 O 的轉置陣，則称 O 是正交的. 由此可知 OO' 也是單位陣. 在一矢量 $\mathfrak{x}$ 上应用矩陣 O 或 M 所得的矢量將表为 $O\mathfrak{x}$ 或 $M\mathfrak{x}$. 一个矩陣 O 是正交的充要条件为: 对于所有的 $\mathfrak{x}$ 有

$$(5)\qquad (O\mathfrak{x}, O\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}).$$

I 可用性質 $I\mathfrak{x}=\mathfrak{x}$ (对于所有的 $\mathfrak{x}$) 來定义.

$x_1, x_2 \cdots x_{p+2}$ 的一个函数称为是 $\mathfrak{x}$ 的一个函数，并將記为 $f(\mathfrak{x})$. (二个或多矢量的函数可类似地定义.)

我們称一个函数 $f(\mathfrak{x})$ 为正交不变式是指: 对于所有的 $\mathfrak{x}$ 及所有的正交矩陣 O 有

$$(6)\qquad f(O\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x}).$$

同样，我們称一个二变矢的函数为正交不变式是指: 对于所有的 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ 及所有的正交矩陣 O 有 $f(O\mathfrak{x}, O\mathfrak{y}) = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$.

有时我們要用到超球極坐标

$$r, \theta_1, \cdots, \theta_p, \phi,$$

定义为:

$$(7)\qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ x_p = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{p-1}\cos\theta_p \\ x_{p+1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_p\cos\phi, \\ x_{p+2} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_p\sin\phi, \end{cases}$$

其中 $r \geqslant 0$

(8) $0\leqslant\theta_j\leqslant\pi(j=1,2,\cdots,p),\ 0\leqslant\phi\leqslant2\pi.$

在这种坐标系中，$(p+2)$ 維的体積元素为

(9) $dV=r^{p+1}(\sin\theta_1)^p(\sin\theta_2)^{p-1}\cdots(\sin\theta_p)\,dt\,d\theta_1\cdots d\theta_p\,d\phi,$

而面元素 $d\Omega$ 則为

(10) $d\Omega=(\sin\theta_1)^p(\sin\theta_2)^{p-1}\cdots(\sin\theta_p)\,d\theta_1\cdots d\theta_p\,d\phi.$

Ω 的全面積 ω 可从上式計算出來，也可从

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x_1^2-\cdots-x_{p+2}^2\right)dx_1\cdots dx_{p+2}$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx\right)^{p+2}$$

$$=\iiint\limits_V\exp\left(-r^2\right)dV=\omega\int_0^{\infty}r^{p+1}\,e^{-r^2}\,dr$$

計算，由此得

(11) $$\omega=\frac{2\pi^{1+\frac{1}{2}p}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}p\right)}.$$

在这里以及在整个本章中我們都將用三个，二个或一个積分符号分别表示 $(p+2)$ 維，$(p+1)$ 維，或 p 維流形的積分.

定义于 Ω 上的一个函数可認为是單位矢 ξ 的分量的一个函数 $F(\xi)$. 表达式

(12) $$\iint\limits_{\Omega(\xi)}F(\xi)\,d\Omega(\xi)$$

表示 $(p+1)$ 重積分，如將 (2)，(7) 式中以 $\theta_1,\cdots,\theta_p,\phi$ 表示的 ξ 的分量式及 (10) 中 $d\Omega(\xi)$ 的对应式代入，即可求得这一積分.

如果 $F_1(\xi)$，$F_2(\xi)$ 为定义于 Ω 上的二个函数，幷設

$$\iint\limits_{\Omega}F_1(\xi)\,F_2(\xi)\,d\Omega(\xi)$$

存在而等于零，則称 $F_1(\xi)$，$F_2(\xi)$ 在 $\Omega(\xi)$ 上正交. 如果从上下文中直接可以看出那个是变矢，那么 $\Omega(\xi)$ 就可簡寫为 Ω.

如果沒有特别的說明，我們总認为拉普拉斯算符 $\varDelta$ 是对 $\mathfrak{x}$ 的分量來說的，也就是說

$$(13)\qquad \varDelta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_{p+2}^2}$$

我們有

$$(14)\qquad \varDelta[r^l(\mathfrak{x},\mathfrak{y})^m]=\left[\frac{m(m-1)(\mathfrak{y},\mathfrak{y})}{(\mathfrak{x},\mathfrak{y})^2}+\frac{l(l+p+2m)}{r^2}\right]r^l(\mathfrak{x},\mathfrak{y})^m.$$

在正交变换下，算符 $\varDelta$ 是不变式，即

$$\sum_{k=1}^{p+2}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}=\sum_{k=1}^{p+2}\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\qquad \mathfrak{y}=O\mathfrak{x}$$

此处 O 表示一正交矩陣.

在極坐标中，我們有

$$\begin{aligned}(15)\qquad \varDelta u=&\ r^{-p-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{p+1}\frac{\partial}{\partial r}u\right)\\&+r^{-2}(\sin\theta_1)^{-p}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[(\sin\theta_1)^p\frac{\partial}{\partial\theta_1}u\right]\\&+r^{-2}(\sin\theta_1)^{-2}(\sin\theta_2)^{1-p}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left[(\sin\theta_2)^{p-1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}u\right]\\&+r^{-2}(\sin\theta_1\sin\theta_2)^{-2}(\sin\theta_3)^{2-p}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left[(\sin\theta_3)^{p-2}\frac{\partial}{\partial\theta_3}u\right]+\cdots\\&+r^{-2}(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{p-1})^{-2}(\sin\theta_p)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_p}\left[(\sin\theta_p)^1\frac{\partial}{\partial\theta_p}u\right]\\&+r^{-2}(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_p)^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}u.\end{aligned}$$

11-1-2. 盖根堡多項式

由如下的母函数：

$$(16)\qquad (1-2xt+t^2)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^\nu(x)t^n\qquad \nu\neq0$$

所定义的 n 次多項式 $C_n^\nu(x)$ 称为 n 次 ν 階**盖根保多項式**或特种

球多項式. Szegö (1939) 把它記为 $P_n^{(\nu)}(x)$. 蓋根堡 (1877, 1884, 1890, 1891, 1893) 曾就任意値的 ν 研究了这些多項式. 他的理論的説明見 3-15 節. 这里我們只須研究 2ν 为一整数的情形, 卽 $2\nu=p=1, 2, 3, \cdots$. 在这种情形下,

$$(17)\quad C_n^{l+\frac{1}{2}}(x)=\frac{2^l l!}{(2l)!}\frac{d^l}{dx^l}P_{n+1}(x)$$

$$=\frac{2^{-n}l!}{(n+l)!(2l)!}\frac{d^{n+2l}}{dx^{n+2l}}(x^2-1)^{n+l}$$

$$(18)\quad C_n^{l+1}(x)=\frac{2^{-l}}{l!(n+l+1)}\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}T_{n+l+1}(x)$$

这里 $l=0, 1, 2, \cdots$

$$(19)\quad P_n(x)=\frac{2^{-n}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n={}_2F_1(-n, n+1; 1; \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x)$$

是一 n 次的勒上特多項式, 而

$$(20)\quad T_n(x)=\tfrac{1}{2}\{[x+i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]^n+[x-i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]^n\}$$

$$(21)\quad ={}_2F_1(-n, n; \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x)$$

$$(22)\quad =\cos(n\cos^{-1}x)$$

是一 n 次車比雪夫多項式. 車比雪夫多項式就是 $\nu=0$ 时的特种球多項式; 它們的母函数为

$$(23)\quad -\tfrac{1}{2}\ln(1-2tx+t^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}T_{n+1}(x)t^{n+1}.$$

从 (20) 式, 如 $n=0, 1, 2, \cdots$, 可得

$$(24)\quad [x+i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]^{n+1}=T_{n+1}(x)$$

$$+i(n+1)^{-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}T_{n+1}(x).$$

对于任意的 $\nu\neq0$, 尙有

$$(25)\quad C_n^{\nu}(x)=(-2)^{-n}(1-x^2)^{-\nu+\frac{1}{2}}$$

$$\times\frac{(2\nu)_n}{(\nu+\frac{1}{2})_n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}.$$

此处

$$(a)_0=1,\ (a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1),\ n=1,2,\cdots$$

方程 (25) 是 3–15(3) 及 2–8(23) 的一个推論.

在 (6) 式的 ω, 11–2(2)式的 $h(n,p)$, 蓋根堡多項式的正規因子的平方

$$(26)\quad N=\int_{-1}^{+1}[C_n^{½p}(x)]^2(1-x^2)^{(p-1)/2}\,dx$$
$$=\frac{2^{2-p}\pi\Gamma(n+p)}{n!(p+2n)[\Gamma(½p)]^2},$$

与 $(p+1)$ 維空間的單位球的总面積

$$(27)\quad \omega'=\frac{2\pi^{½+½p}}{\Gamma(½+½p)},$$

及数値

$$(28)\quad C_n^{½p}(1)=\frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!}=\frac{(p)_n}{n!}=(-1)^n\binom{-p}{n}$$

之間存在有下面的关系

$$(29)\quad \frac{\omega' N}{C_n^{½p}(1)}=\frac{\omega C_n^{½}(1)}{h(n,p)}=\frac{4\pi^{1+½p}}{(2n+p)\Gamma(½p)}.$$

本節中各公式的証明見 Appell-Kampé de Fériet (1926).

$C_n^{½p}$ 起源于方程 $\Delta u+k^2u=0$ [$(p+2)$維空間的波] 的特解, 其詳細研究見 A. Sommerfeld (1943) 及 W. Magnus (1949).

11-2. 調和多項式

$x_1, x_2, \cdots, x_{p+2}$ 的 n 次多項式 $H_n(\mathfrak{x})$ 是 n 次的齐次多項式, 因此 $H_n(\lambda\mathfrak{x})=\lambda^n H_n(\mathfrak{x})$, 且滿足拉普拉斯方程 $\Delta H_n(\mathfrak{x})=0$, 这种多項式称为 n 次調和多項式. 顯然, $r^{-n}H_n(\mathfrak{x})=H_n(\xi)$ 是超球面 Ω 或 $r=1$ 上的一个單値連續函数, 也可以表为 $\theta_1, \cdots, \theta_p, \phi$ 的三角多項式. 其記法見 11–1 節.

形如 $\Delta u+f(r)u=0$ 的偏微分方程具有形如 $u=R_n(r)H_n(\xi)$ 的解, 这里 $f(r)$ 是 r 一数的已知解析函数, $u=u(\mathfrak{x})$. $H_n(\mathfrak{x})$ 是一

任意 n 次調和多項式，$R_n(r)$ 是常微分方程

(1) $$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{p+1}{r}\frac{dR}{dr}+[f(r)-n(n+p)r^{-2}]R=0$$

的解。現在我們來証明，对于 $p+2$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_{p+2}$，共有

(2) $$h(n, p)=(2n+p)\frac{(n+p-1)!}{p!\ n!}$$

个綫性無关的 n 次調和多項式.

为了証明这一点，我們先來計算 $(p+2)$ 个变量的綫性無关的 n 次齐次多項式的数目 $g(n, p)$. 顯然

(3) $$g(n, p)=g(n, p-1)+g(n-1, p-1)+\cdots+g(0, p-1)$$

(4) $$g(n, 0)=n+1,$$

而 $g(n, p)$ 可由 (3) 及 (4) 唯一地确定.

(5) $$g(n, p)=\frac{(n+p+1)!}{n!(p+1)!}=\binom{p+n+1}{n}$$

今，拉普拉斯方程給 H_n 中的系数加上了条件，由于 ΔH_n 是 $n-2$ 次的齐次多項式，因此，至多有 $g(n-2, p)$ 个独立的条件，且

(6) $$h(n, p)\geqslant g(n, p)-g(n-2, p).$$

另一方面，$g(n-2, p)$ 个綫性独立的多項式

$$x_1^2 P(x_1, \cdots, x_{p+2})$$

并不滿足拉普拉斯方程，其中 P 表示任一 $n-2$ 次齐次多項式，因此

(7) $$h(n, p)\leqslant g(n, p)-g(n-2, p),$$

这就証明了 (2).

除了在 $n=0$ 的情形之外，沒有一个調和多項式在所有正交变換下是不变的[1]. 但存在有一个 $H_n(\mathfrak{x})$，它在所有保持單位球的一点固定的那些正交变換下是不变的. 因为对于所有使 η 不变的正交变換，有 $(O\mathfrak{x}, \eta)=(\mathfrak{x}, \eta)$，因此就足可以証明下面的預备

[1] G. Polyà 及 B. Meyer (1950) 曾研究了三变量的調和多項式，它在正交羣的任一已知有限子羣下，都是不变的。

定理:

預备定理 1. 对于每一个單位矢量 η, **存在有一个而且只有一个調和多項式** $H_n(\mathfrak{x})$, **満足条件:**

(i) $H_n(\mathfrak{x})$ **只依賴于** r **及** $(\mathfrak{x}, \eta)$;

(ii) $H_n(\eta)=1$

这一多項式为

$$(8) \qquad H_n(\mathfrak{x})=r^n \frac{C_n^{\frac{1}{2}p}[(\xi, \eta)]}{C_n^{\frac{1}{2}p}(1)},$$

其中 $\xi=\mathfrak{x}/r$, 且 $C_n^{\frac{1}{2}p}$ 如 11-1(16).

由于 $C_n^{\frac{1}{2}p}(x)$ 將根据 n 为偶或奇而可以 x 的偶次冪或奇次冪表示,因此 (8) 式的右边是 $x_1, \cdots, x_{p+2}$ 的多項式,但 r^n 就不一定如此. 因为 $C_n^{\frac{1}{2}p}(1) \neq 0$, 故(8)必滿足 (ii). 因此現在我們只要証明 (i) 可确定 $H_n(\mathfrak{x})$ (僅留一常数因子)即可. 因为 $H_n(\mathfrak{x})$ 是 n 次齐次多項式,故其形式必为

$$C_0(\mathfrak{x}, \eta)^n+c_1 r(\mathfrak{x}, \eta)^{n-1}+\cdots+c_n r^n,$$

其中 $C_0, c_1, \cdots, c_n$ 是常数.

由于 $\Delta H_n=0$, 故从 11-1(14), 对于 $m=0, 1, 2, \cdots$ 可得关系式:

$$(9) \qquad (n-m)(n-m-1)c_m+(m+2)(2n-m-2+p)c_{m+2}=0$$

且

$$(10) \qquad c_1=0.$$

因此 H_n 可由 c_0 及 $c_1=c_3=\cdots=0$ 來唯一地确定. 为了構筑 H_n, 注意从 11-1(14) 有 $\Delta r^{-p}=0$, 因此对于所有的 r, 有

$$(11) \qquad \Delta\|r\eta-\mathfrak{x}\|^{-p}=\Delta\left[\sum_{k=0}^{p+2}(r\eta_k-x_k)^2\right]^{-\frac{1}{2}p}=0.$$

設 $r=t^{-1}$, 則知在

$$(12) \qquad [1-2(\xi, \eta)rt+r^2 t^2]^{-\frac{1}{2}p}$$

的展开式中, t^n 的系数滿足拉普拉斯方程. 这就証明了預备定理

1 对于 $p=1, 2, \cdots$ 是正确的. 在 $p=0$ 的情形下,我們可不用 11–1(16) 而从 11–1(23) 入手,从而可知在 $p=0$ 时,替代 (8) 式的是

(13)　$r^n T_n[(\xi, \eta)]$

它是一个多項式,其存在由預备定理 1 說明.

現在我們可以構筑 n 次綫性独立調和多項式的一个完全集. 設

(14)　$H_{m,k}(x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{p+2})$

表示任一 m 次的齐次調和多項式,它不依賴于 $x_1, \cdots, x_{k-1}$. 可以証明,对于参数 t 的所有一切值,必有

(15)　$\Delta[(1-2x_1 t+r^2 t^2)^{-m-\frac{1}{2}p} H_{m,2}]=0,$

这一公式可以帮助我們在已知 $p+1$ 个变量的所有齐次調和多項式的时候,可求得 $p+2$ 个变量的所有齐次調和多項式. 从 $h(m, p+1)$ 个綫性独立的多項式 $H_{m,2}$, 可得 $h(m, p-1)$ 个綫性独立的多項式 $H_n(\xi)$, 它是 x_1 的 $n-m$ 次多項式,即

(16)　$r^{n-m} C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}p}(x_1/r) H_{m,2},$

其中 $m=0, 1, 2, \cdots n$. 由于从 (3) 式及

$$h(n, p)=g(n, p)-g(n-2, p)$$

可得

(17)　$h(n,p)=h(n,p-1)+h(n-1,p-1)+\cdots+h(0,p-1),$

故从 (16) 式可得所有的 $H_n(\xi)$.

因为

(18)　$(x_{p+1} \pm i x_{p+2})^m$

組成綫性独立的 $H_{m,p}$ 的完全集,故从归納法可得下面的定理:

定理 1. 設 $m_0, \cdots, m_p$ 为整数,滿足条件

(19)　$n=m_0 \geqslant m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_p \geqslant 0,$

并設 r_k 定义为

(20)　$r_k=(x_{k+1}^2+x_{k+2}^2+\cdots+x_{p+2}^2)^{\frac{1}{2}}$

其中 $k=0, 1, \cdots, p$ 且 $r_0=r$. 則

(21) $$H(m_k, \pm; \mathfrak{x}) \equiv H(n, m_1, \cdots, m_{p-1}, \pm m_p; x_1, \cdots, x_{p+2})$$
$$=\left(\frac{x_{p+1}}{r_p}+i\frac{x_{p+2}}{r_p}\right)^{\pm m_p} r_p^{m_p} \prod_{k=0}^{p-1} r_k^{m_k-m_{k+1}} C_{m_k-m_{k+1}}^{m_{k+1}+\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k}(x_{k+1}/r_k)$$

組成 $h(n, p)$ 个 n 次綫性独立的調和多項式的完全集. 当然, 如 $m_p=0$, 則 $H(m_k,+;\mathfrak{x})=H(m_k,-;\mathfrak{x})$.

系 在超球極坐标 11-1(7) 中, 有

(22) $$H(m_k, \pm; \mathfrak{x})=r^n Y(m_k; \theta_k, \pm\phi),$$

其中

(23) $$Y(m_k; \theta_k, \pm\phi)=e^{\pm i m_p\phi} \prod_{k=0}^{p-1} (\sin\theta_{k+1})^{m_{k+1}}$$
$$\times C_{m_k-m_{k+1}}^{m_{k+1}+\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k}(\cos\theta_{k+1}).$$

11-3. 面調和函数

如 $H_n(\mathfrak{x})$ 为一 n 次的齐次調和多項式, 我們把

(1) $$r^{-n} H_n(\mathfrak{x})=H_n(\xi)=Y_n(\theta, \phi)$$

称为 n 次的面調和函数. 这里 θ 表示 $\theta_1, \cdots, \theta_p$ 而 ξ 表示 $\mathfrak{x}/r$. 面調和函数是 Ω (單位超球面 $r=1$) 上的單值連續函数. 特別是, 从 11-2(22) 及 11-2(23) 式可得 $n=m_0$ 次面調和函数为

(2) $$r^{-n}H(n, m_1, \cdots, \pm m_p; x_1, \cdots, x_{p+2})=r^{-n} H(m_k, \pm; \mathfrak{x})$$
$$=H(n, m_1, \cdots, \pm m_p; \xi_1, \cdots, \xi_{p+2})=H(m_k, \pm; \xi)$$

(3) $$=Y(n, m_1, \cdots, m_p; \theta_1, \cdots, \theta_p, \pm\phi)=Y(m_k; \theta, \pm\phi).$$

現在我們來說明函数 (2) 及 (3) 的正交性質 (定义見 11-1 節). 对于任何整数 l, m, 取記法:

(4) $$E_k(l, m)$$
$$=\frac{\pi 2^{k-2m-p}\Gamma(l+m+p+1-k)}{(l+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k)(l-m)!\,[\Gamma(m+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k)]^2}$$

此处 $l \geqslant m \geqslant 0$, 又

(5) $$N(m_0, m_1, \cdots, m_p)=2\pi \prod_{k=1}^{p} E_k(m_{k-1}, m_k)$$

其中 $m_0, m_1, \cdots, m_p$ 滿足 11-2(19)，于是有

定理 2. (2) 或 (3) 中任何二个不同的函数只要不为共轭复数，則都是在 Ω 上正交的. 在共轭复数函数的情况下[或在实函数 (2) 或 (3) 的平方的情形下]，有

$$(6) \quad \iint_\Omega |H(m_k, \pm; \xi)|^2 d\Omega = \iint_\Omega |Y(m_k; \theta, \pm\phi)|^2 d\Omega$$

$$= N(m_0, m_1, \cdots, m_p) \equiv N(m_k),$$

特别是，任何二个不同次的面調和函数是在單位超球面上正交的.

(2) 或 (3) 中的函数組成了 Ω 上的正交函数的一个完全系. 我們來証明下面的定理:

定理 3. 在 Ω 上处处連續的一个函数 $f(\xi)$，如果在 Ω 上与所有的函数 $H(m_k, \pm; \xi)$ 正交，則在 Ω 上恆等于零.

为了証明这一定理，可設 $f(\eta) = 2a > 0$，其中 η 为一固定的單位矢量(即为 Ω 上的一点). 由于 $f(\xi)$ 是連續的，所以对于所有滿足不等式 $\|\xi - \eta\| \leqslant \delta$ 的 ξ，我們可以假設 $f(\xi) \geqslant a$，或者，如 $1 - (\xi, \eta) \leqslant \frac{1}{2}\delta^2$，有 $f(\xi) \geqslant a$，这里的 δ 是一足夠小的正数. 根据韋尔司特拉斯的多項式逼近定理(参看 Widder, 1947, p. 355)，应用于函数

$$\phi(x) = 1 - (1-x)/(\tfrac{1}{2}\delta^2) \qquad 1 - x \leqslant \tfrac{1}{2}\delta^2,$$

$$= 0 \qquad 1 - x \geqslant \tfrac{1}{2}\delta^2,$$

于是，給定任意一个 $\varepsilon > 0$，必存在一正整数 n 及一 n 次多項式 $F_n(x)$，滿足条件

$$|F_n(x) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

而且

$$\iint_\Omega f(\xi)\phi[(\xi, \eta)]\, d\Omega \geqslant a^* > 0,$$

这里 a^* 是一正数，依賴于 a 及 δ，但不依賴于 n 及 ε，因此

(7) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\Omega} f(\xi)F_n[(\xi,\eta)]\,d\Omega=a^*.$$

因为 $f(\xi)$ 与 (2) 或 (3) 中的所有函数都正交,而根据定理 1, $C_k^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]$ 是这些函数的綫性組合,因此对于每一个 k, $f(\xi)$ 必与 $C_k^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]$ 正交. 不僅如此,由于 $C_k^{\frac{1}{2}p}(z)$ 恰正是 z 的 k 次式, $F_n(z)$ 就是 $C_k^{\frac{1}{2}p}(z)$, $k=0,1,\cdots,n$ 的綫性組合. 因此 $f(\xi)$ 正交于 $F_n[(\xi,\eta)]$, 这与 (7) 矛盾,因而証明了定理 3.

从定理 3 的証明中,可得一个用面調和函数向連續函数的特殊类逼近的定理. 那就是:

預备定理 2. 設 $F(x)$ 为实变数 x 的函数,在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上連續,对于 $n=0,1,2,\cdots$, 定义

(8) $$\phi_n[(\xi,\eta)]=\sum_{m=0}^{n}a_m C_m^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]$$

其中

(9) $$C_n^{\frac{1}{2}p}(1)A(n,p)a_n=\iint_{\Omega} C_n^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]F[(\xi,\eta)]\,d\Omega(\xi),$$

且

(10) $$A(n,p)\,C_n^{\frac{1}{2}p}(1)=\iint_{\Omega}\{C_n^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]\}^2 d\Omega(\xi).$$

則在 Ω 上連續的 ξ 的函数 $F[(\xi,\eta)]$ 將可用 ϕ_n 來逼近,如下:

(11) $$\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega}|F[(\xi,\eta)]-\phi_n[(\xi,\eta)]|^2\,d\Omega=0.$$

有时, $A(n,p)$ 不依賴于固定的單位矢量 η, 它們的值由 11-4 (13) 式确定.

为了証明这一預备定理,在 (10) 式中选定系数 a_n 使 (11) 中的積分为極小. 由于 $C_k^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]$ 和 $C_m^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]$ 在 $k\neq m$ 时是在 Ω 上正交的 (見定理 2 后的說明),故可精确地求得 (9) 中 a_n 的值. 另一方面,根据韋尔司特拉斯的多項式逼近定理,可知对于適

当选定的 a_n 及足夠大的 n,(11)式中的被積函数可使之任意的小.因此,(11) 式積分的極小值在 $n\to\infty$ 时应趋向于零.

將 Ω 上給定的一个函数展开为面調和函数級数的問題,曾由几个学者研究过. $p=1$ 的情形可參看 Hobson (1931), 他的文中列出了很多参考資料. $p=2$ 的情形曾由 Kogbetliantz (1924) 及 Koschmieder (1929) 研究过,任意 p 的情形則由 Koschmieder (1931)处理过. 一个函数的面調和函数級数展开式有时又称为它的拉普拉斯級数. 一般說來,一个連續函数的拉普拉斯級数的收斂性了解得还不多,但它的 Cèsaro 可和性(相当高階的)还是可以証明的.

11-4. 加 法 定 理

对于一个固定的 η, 面調和函数 $C_k^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]$ 可用 $S(m_k,\pm;\xi)$ 來表示,其中 $m_0=n$. 更一般地說,則有

定理 4. 設 $S_n^l(\xi)$, $l=1, 2, \cdots, h$ 是 $h=h(n, p)$ 个綫性独立的 n 次实面調和函数, 并設 S_n^l 在 Ω 上为規格化正交,因此,对于 $l, m=1, 2, \cdots, h$,

$$(1)\qquad \iint\limits_{\Omega} S_n^l(\xi)\, S_n^m(\xi)\, d\Omega=\begin{cases}0 & \text{如 } n\neq m\\ 1 & \text{如 } n=m\end{cases}$$

則对于任一固定的單位矢量 η, 有

$$(2)\qquad \frac{C_n^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]}{C_p^{\frac{1}{2}p}(1)}=(\omega/h)\sum_{l=1}^{h} S_n^l(\xi)S_n^l(\eta)$$

記法見 11-1(11), 11-1(12), 11-2(2), 11-1(16).

从定理 2 可得 (2) 的一个特例

$$(3)\qquad C_n^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{p\omega}{(2n+p)}\sum\frac{\varepsilon(m_p)}{N(m_k)}[H(m_k,+;\xi)H(m_k,-;\eta)$$

$$+H(m_k,-;\xi)H(m_k,+;\eta)]$$

其中，和式是对所有 m_k 的整数值求的，且 $n=m_0\geqslant m_1\geqslant\cdots\geqslant m_p\geqslant 0$，又

$$(4)\qquad \varepsilon(0)=1,\ \varepsilon(m)=2,\qquad m>0.$$

从 11-2(21) 式可知，如果 ξ 的 $p+2-l$ 个分量都等于零，即如

$$\xi_{l+1}=\xi_{l+2}=\cdots=\xi_{p+2}=0$$

则 $S(m_k,\pm;\xi)$ 將等于零，但

$$m_l=m_{l+1}=\cdots=m_p=0$$

的情形除外．因此，如令

$$\xi=(\cos\rho,\sin\rho,0,\cdots,0)$$

$$\eta=(\cos\sigma,\sin\sigma,0,\cdots,0),$$

则在 $p>1$ 时，(3)式变为

$$(5)\qquad C_n^{\frac{1}{2}p}(\cos\rho\cos\sigma+\sin\rho\sin\sigma)=C_n^{\frac{1}{2}p}[\cos(\rho-\sigma)]$$

$$=\frac{\Gamma(p-1)C_n^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}(1)}{\Gamma(\frac{1}{2}p)\Gamma(\frac{1}{2}p)}\sum_{m=0}^{n}B_{n,m}(\sin\rho)^m C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}p}(\cos\rho)$$

$$\times(\sin\sigma)^m C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}p}(\cos\sigma)$$

其中

$$(6)\qquad B_{n,m}=2^{2m}(n-m)!\,(p+2m-1)[\Gamma(m+\tfrac{1}{2}p)]^2$$

$$\times[\Gamma(p+n+m)]^{-1}.$$

如在 (3) 中令

$$\xi=(\cos\alpha,\sin\alpha\cos\rho,\sin\alpha\sin\rho,0\cdots,0),$$

$$\eta=(\cos\beta,\sin\beta\cos\sigma,\sin\beta\sin\sigma,0,\cdots,0),$$

则从 (5)，对于 $p>1$ 令 $\rho-\sigma=\phi$，有

$$(7)\qquad C_n^{\frac{1}{2}p}(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\phi)$$

$$=\frac{\Gamma(p-1)}{[\Gamma(\frac{1}{2}p)]^2}\sum_{m=0}^{n}B_{n,m}(\sin\alpha)^m$$

$$\times C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}p}(\cos\alpha)(\sin\beta)^m C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}p}(\sin\alpha)C_m^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}(\cos\phi)$$

其中 $B_{n,m}$ 如 (6)．对于 $p=1$，有

$$(8)\quad P_n(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\phi)=P_n(\cos\alpha)P_n(\cos\beta)$$
$$+2\sum_{m=0}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\alpha)P_n^m(\cos\beta)\cos m\phi$$

其中

$$(9)\quad P_n(x)=C_n^{1/2}(x)$$

是勒上特多項式，而

$$(10)\quad P_n^m(x)=(-1)^m\pi^{-1/2}\Gamma(m+1/2)2^m(1-x^2)^{1/2 m}C_{n-m}^{m+1/2}(x)$$

是一連帶勒上特多項式.

通常，公式 (7)[或者在 $p=1$ 的情形下是公式 (8)] 称为**特种球多項式的加法定理**. 重复应用 (7) 和 (8) 就可得 (3)（但不是整个定理 4）. (7) 及 (8) 稍經修正以后对于一般的 C_n^ν 也有效，这里 2ν 不再須要是整数；这种情形見 3-15(19) 及 3-11(2).

定理 4 的証明將以 $C_n^{1/2p}[(\xi,\eta)]$ 是 ξ,η 的一个正交的不变式为根据(定义見 11-1-1 節). 我們將先証明 $C_n^{1/2p}[(\xi,\eta)]$除了有一个常数因子外，是唯一成为 n 次面調和函数的正交不变式. 为此，先須証明：

預备定理 3. **設** $F(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ **为矢量** $\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ **的分量的多項式，且設对于所有的正交变换** O (見 11-1-1 節)，**有**

$$(11)\quad F(O\mathfrak{x},O\mathfrak{y})=F(\mathfrak{x},\mathfrak{y}),$$

則必存在一三变量 u,v,w **的多項式** $\Phi(u,v,w)$，**滿足条件**

$$(12)\quad F(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\Phi[(\mathfrak{x},\mathfrak{x}),(\mathfrak{x},\mathfrak{y}),(\mathfrak{y},\mathfrak{y})]$$

对于 $\mathfrak{x}$ **和** $\mathfrak{y}$ **的分量都一样.**

証：如果 $\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ 是固定的，則可找出一正交坐标系，使

$$\mathfrak{x}=(\alpha,0,0,\cdots,0),\ \mathfrak{y}=(\beta,\gamma,0,\cdots,0)$$
$$(\mathfrak{x},\mathfrak{x})=\alpha^2,\ (\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\alpha\beta,\ (\mathfrak{y},\mathfrak{y})=\beta^2+\gamma^2,$$

因此

$$\alpha=u^{1/2},\ \beta=v/u^{1/2},\ \gamma=(uw-v^2)^{1/2}/u.$$

由于 F 是一正交不变式，这說明它可寫成为 α,β,γ 的多項式：

$$F=F^*(\alpha,\beta,\gamma)=F^*[u^{1/2},v/u^{1/2},(uw-v^2)^{1/2}/u].$$

因为存在有正交变换可使

$$\alpha\to-\alpha,\ \beta\to-\beta,\ \gamma\to\gamma$$

或

$$\alpha\to\alpha,\ \beta\to\beta,\ \gamma\to-\gamma$$

故知 F^* 是 $\gamma^2,\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta$ 的多項式，且可寫成如下形式

(13)　$F^*=u^{-m}\Phi^*(u,v,w)$,

其中 m 为一整数，Φ^* 是 u,v,w 的多項式.

交换 $\mathfrak{x}$ 及 $\mathfrak{y}$ 的位置，可得

(14)　$w^{-k}\Psi(u,v,w)=u^{-m}\Phi^*(u,v,w)$

其中 k 为一整数，Ψ 是一多項式. 由于 u,v,w 是代数上独立的，故从 (14) 可知 $u^{-m}\Phi^*$ 是一多項式，从而証明了預备定理 3.

預备定理 4. 設 ξ,η,ζ 为 $(p+2)$ 維空間的任意單位矢量. 則

(15)
$$\iint\limits_{\Omega(\eta)} C_n^{1/2p}[(\xi,\eta)]\,C_n^{1/2p}[(\eta,\zeta)]\,d\Omega(\eta)=A(n,p)\,C_n^{1/2p}[(\xi,\zeta)],$$

其中

(16)
$$A(n,p)=C_n^{1/2p}(1)\frac{\omega}{h(n,p)}=\frac{2\pi^{1+1/2p}}{(n+1/2p)\Gamma(1/2p)}.$$

預备定理 4 是基礎面調和函数 $C_n^{1/2p}[(\xi,\eta)]$ 的一个褶合定理.

为了証明这一預备定理，設 $\mathfrak{x}$ 及 $\mathfrak{z}$ 为任意二矢量，$\xi=\mathfrak{x}/\|\mathfrak{x}\|$, $\zeta=\mathfrak{z}/\|\mathfrak{z}\|$. 由于

$$\|\mathfrak{x}\|^n C_n^{1/2p}[(\xi,\eta)],\ \|\mathfrak{z}\|^n C_n^{1/2p}[(\eta,\zeta)]$$

分别是 $\mathfrak{x}$ 及 $\mathfrak{z}$ 分量的調和多項式，故知 $\|\mathfrak{x}\|^n\|\mathfrak{z}\|^n$ 乘上 (15) 式的左边以后就是变量的每一集中同时为 $\mathfrak{x}$ 及 $\mathfrak{z}$ 的 n 次調和多項式，而且这一調和多項式是 $\mathfrak{x}$ 及 $\mathfrak{z}$ 的一个正交不变式，因为在同时对 $\mathfrak{x},\mathfrak{z}$ 及 η (因而是对 ξ,ζ 及 η) 作任一正交变换时它保持不变，而

在对 η 作任一正交变换时積分保持不变．这样，根据預备定理 3，可知我們的調和多項式是 $\|\mathfrak{x}\|^2$, $\|\mathfrak{z}\|^2$ 的多項式，且 $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \|\mathfrak{x}\|\ \|\mathfrak{z}\|$ (ξ,ζ)．因此从預备定理 1 可知它是

$$\|\mathfrak{x}\|^n\ \|\mathfrak{z}\|^n C_n^{\frac{1}{2}p}[(\xi, \zeta)]$$

的一个倍数，这就証明了預备定理 4．令

$$\xi = \zeta = (1, 0, \cdots, 0)$$

即可确定因子 $A(n, p)$，为

$$A(n, p) C_n^{\frac{1}{2}p}(1) = \omega' \int_{-1}^{+1} [C_n^{\frac{1}{2}p}(x)]^2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}} dx, \tag{17}$$

其中 ω' 为 $(p+1)$ 維空間的超球面的面積．从 3–15 (17)，11–1 (26)，11–1 (29) 及 11–2 (2) 可得出 (16)．

現在我們來說明 ξ 的正交变换在面調和函数中所生的效应．

預备定理 5.　設 $S_n^l(\xi)$, $l=1, 2, \cdots, h$ 为 n 次規格化正交面調和函数的一个完全系，使 (1) 成立，再設 O 是 $(p+2)$ 維空間的一个正交变换．則

$$S_n^l(O\xi) = \sum_{k=1}^{h} g_{lk} S_n^k(\xi), \tag{18}$$

其中 h^2 个元素 g_{lk} 的矩陣 G 是 $h=h(n, p)$ 行与列的正交矩陣，即

$$G'G = GG' = I. \tag{19}$$

其中 G' 为 G 的轉置陣，I 是 $h(n, p)$ 行与列的單位矩陣．

証：因为在正交变换下，拉普拉斯算符是一不变式（見 11–1 節），$S_n^l(O\xi)$ 是 n 次面調和函数，因此可用完全系 $S_n^k(\xi)$ 表示为 (15) 的形式．

在 ξ 换为 $O\xi$ 时，(1) 式中的積分保持不变，故知 $S_n^l(O\xi)$ 也組成一規格化正交系，这样就有 $GG'=I$．从此有 $G'G=I$（見 Birkhoff 及 MacLane 1947，第 9 章）．

現在只要証明

$$(20)\quad \sum_{l=1}^{h} S_n^l(\xi)S_n^l(\eta) = \sum_{l=1}^{h} S_n^l(O\xi)S_n^l(O\eta)$$

是 ξ 和 η 的正交不变式就可証明定理 4. 这可从預备定理 5, 特别是 $GG'=I$ 中推出. 从預备定理 4 的証明中可見 (20) 式应为 $C_n^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]$ 的倍数,將 (20) 的平方对 η 在整个面積 Ω 上進行積分卽可确定常数因子. 根据 (1) 它应为

$$(21)\quad \sum_{l=1}^{h} [S_n^l(\xi)]^2.$$

另一方面, 在 (12) 中令 $\xi=\eta$, 可見它必为 $C_n^{\frac{1}{2}p}(1)$ 的某一倍数. 將 (21) 式在 $\Omega(\xi)$ 上積分, 則根据 (1) 卽可得 h, 这就導出了定理 4 中的 (2).

从定理 4, 对于每一个 m 次的面調和函数 $S_m(\xi)$ 有

$$(22)\quad \iint\limits_{\Omega(\xi)} C_n^{\frac{1}{2}p}[(\xi,\eta)]S_m(\xi)\,d\Omega(\xi) = \begin{cases} 0 & n\neq m, \\ (\omega/h)C_n^{\frac{1}{2}p}(1)S_p(\eta), & n=m. \end{cases}$$

从預备定理 2, 特别是从 11-3 (8), 11-3 (11), 应用許瓦兹不等式可得:

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega(\xi)} \{F[(\xi,\eta)]-\phi_n[(\xi,\eta)]\}S_n(\xi)\,d\Omega(\xi)=0,$$

其中 F, ϕ_n 由 11-3, 11-3(8) 定义. 如果將这一关系与(22) 式合併,則可得(見 Funk, Hecke, 1916, 1918):

Funk-Hecke 定理: 設 $F(x)$ 为实变数 x 的函数,在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上連續,幷設 $S_n(\xi)$ 为任一 n 次面調和函数. 則对于任一單位矢量 η, 有

$$(23)\quad \iint\limits_{\Omega(\xi)} F[(\xi,\eta)]S_n(\xi)\,d\Omega(\xi)=\lambda_n S_n(\eta),$$

上式中的積分是在單位超球面 Ω 的整个面積上進行的, 且

$$(24)\quad \lambda_n = \frac{\omega'}{C_n^{\frac{1}{2}p}(1)} \int_{-1}^{1} F(x)C_n^{\frac{1}{2}p}(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}\,dx.$$

这里 ω' 表示 $(p+1)$ 維空間的單位超球面的全面積，即

$$\omega'=\frac{2\pi^{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2})},\quad \frac{\omega'}{C_n^{\frac{1}{2}p}(1)}=\frac{(4\pi)^{\frac{1}{2}p}n!\Gamma(\frac{1}{2}p)}{(n+p-1)!}.$$

Erdélyi (1938) 曾証明我們尽可以假定 $|F(x)|$ 及 $|F(x)|^2$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上是 Lebesgue 可積的，他又証明

$$\lambda_n=i^n(2\pi)^{1+\frac{1}{2}p}\int_{-\infty}^{\infty}t^{-\frac{1}{2}p}J_{n+\frac{1}{2}p}(t)f(t)dt,$$

其中

$$f(t)=(2\pi)^{-1}\int_{-1}^{1}e^{-ixt}F(x)dx,$$

这里的 J 表示一貝塞尔函数．注意

$$t^{-\frac{1}{2}p}J_{n+\frac{1}{2}p}(t)=t^n 2^{-n-\frac{1}{2}p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-t^2/4)^m}{m!\Gamma(n+m+1+\frac{1}{2}p)},$$

是 t 的一个單值函数．

11-5. $P=1, h(n,p)=2n+1$ 的情形

11-5-1. 三維空間的面調和函数的母函数

(1) $\mathfrak{x}=(x_1, x_2, x_3)$

表示一具有三个分量的矢量．我們以下式定义多項式 $H_n^m(\mathfrak{x})$：

(2) $[x_2+ix_3-2x_1t-(x_2-ix_3)t^2]^n=t^n\sum_{m=-n}^{n}H_n^m(\mathfrak{x})t^m.$

如以 $-\tau^{-1}$ 代 t，則得

(3) $\overline{H}_n^m=(-1)^m H_n^{-m},$

这里一划表示它是共軛复数多項式．(2) 式的左边可寫成 $(\mathfrak{u},\mathfrak{x})^n$ 的形式，其中

(4) $\mathfrak{u}=(-2t, 1-t^2, i+it^2).$

从 $(\mathfrak{u},\mathfrak{u})=0$ 及从 11-1(14)式可知 (2) 式的二边对于所有的 t 都满足拉普拉斯方程，也就是說 $H_n^m(\mathfrak{x})$ 是 n 次的齐次調和多項式．H_n^m 的綫性無关可从

$$x_2+ix_3,\ -2x_1,\ -(x_2-ix_3)$$

的代数無关中推出．令 $r=\|\mathfrak{x}\|$, $\xi=\mathfrak{x}/r$, 函数

(5) $\quad r^{-n}H_n^m(\mathfrak{x})=S_n^m(\xi) \qquad m=0,\ \pm1,\ \cdots,\ \pm n.$

組成一个綫性無关的 n 次面調和函数的完全系．从 (3) 式可得

(6) $\quad S_n^{-m}(\xi)=(-1)^m\bar{S}_n^m(\xi).$

正交性关系式为

(7) $$\iint_\Omega S_n^m(\xi)\,\bar{S}_n^{m'}(\xi)\,d\Omega=\begin{cases}0 & m\neq m'\\ 2\pi\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}\dbinom{2n}{m+n}, & m=m'\end{cases}$$

$$m,\ m'=0,\ \pm1,\ \cdots,\ \pm n,$$

式中的積分在單位球面 Ω 的整个面積上進行．(7)式的証明如下：引進

(8) $\quad \mathfrak{b}=(-2s,\ 1-s^2,\ i+is^2),$

并考察

(9) $$\iint_\Omega (\mathfrak{U},\xi)^n(\bar{\mathfrak{b}},\xi)^n\,d\Omega(\xi),$$

它是 $\mathfrak{U}$ 及 $\mathfrak{b}$ 的一个正交不变式(参看 11-4 節預备定理 4 的証明)．根据預备定理 2, 可知它必为 $(\mathfrak{U},\mathfrak{U})$, $(\bar{\mathfrak{b}},\bar{\mathfrak{b}})$, $(\mathfrak{U},\bar{\mathfrak{b}})$ 的多項式,而因为 $(\mathfrak{U},\mathfrak{U})=(\bar{\mathfrak{b}},\bar{\mathfrak{b}})=0$, 故知 (9) 式必为 $(\mathfrak{U},\bar{\mathfrak{b}})^n$ 的一个倍数．如引進公式 (2)[及在 (9) 中引進 $(\bar{\mathfrak{b}},\xi)^n$ 的对应展开式],則得

(10) $$(ts)^n\sum_{l,\ m=-n}^{n}t^l s^m\iint_\Omega S_n^l(\xi)\bar{S}_n^m(\xi)\,d\Omega$$
$$=\mu(\mathfrak{U},\bar{\mathfrak{b}})^n=\mu\,2^n(1+st)^{2n},$$

这里令 $s=t=0$, 就可算出 μ, 又

(11) $\quad \xi=(\cos\theta,\ \sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi),\ d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\phi,$

这样就得

(12) $$2^n\mu=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi d\theta(\sin\theta)^{2n+1}=2\pi\,\Gamma(\tfrac{1}{2})n!/\Gamma(n+\tfrac{3}{2}).$$

比較 (10) 式二边 $t^l s^m$ 的系数就可得 (7).

为了得出 $S_n^m(\xi)$ 的一个顯式，可对 (2) 式应用柯西定理，得

$$(13)\quad H_n^m(\mathfrak{x})=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)}(\mathfrak{U},\mathfrak{x})^n t^{-n-m-1}\,dt$$

$$=(2\pi i)^{-1}(-1)^n(x_2-ix_3)^n\int^{(0+)}\{[t+x_1/(x_2-ix_3)]^2-r^2(x_2-ix_3)^{-2}\}^n t^{-n-m-1}\,dt.$$

如令

$$t+x_1/(x_2-ix_3)=\tau,\ x_1/(x_2-ix_3)=\sigma,$$

则得

$$(14)\quad H_n^m(\mathfrak{x})=(2\pi i)^{-1}(ix_3-x_2)^n\times\int^{(\sigma+)}[\tau^2-r^2(x_2-ix_3)^{-2}]^n(\tau-\sigma)^{-m-n-1}\,d\tau$$

$$(15)\quad =\frac{(-1)^m}{(n+m)!}(x_2-ix_3)^n\frac{d^{n+m}}{d\tau^{n+m}}\left[\tau^2-\left(\frac{r\sigma}{x_1}\right)^2\right]^n$$

$$(16)\quad =\frac{r^n}{(n+m)!}\left(\frac{x_2-ix_3}{r}\right)^m\frac{d^{n+m}}{d\xi_1^{n+m}}(1-\xi_1^2)^n,\qquad \xi_1=x_1/r.$$

如果我們把連帶勒上特函数 $P_n^m(x)$ 定义为

$$(17)\quad P_n^m(x)=(-1)^{n+m}2^{-n}(n!)^{-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(1-x^2)^m$$

$$m=0,\ \pm1,\ \cdots,\ \pm n,$$

则得

$$(18)\quad S_n^m(\xi)=r^{-n}H_n^m(\mathfrak{x})$$

$$=(-1)^{n+m}\frac{2^n n!}{(n+m)!}(\xi_2-i\xi_2)^m(1-\xi_1^2)^{-\frac{1}{2}m}P_n^m(\xi_1),$$

而对于球極坐标中的对应函数（見 11-3 節），有

$$(19)\quad Y_n^m(\theta,\phi)=S_n^m(\xi)=(-1)^{n+m}\frac{2^n n!}{(n+m)!}e^{-im\phi}P_n^m(\cos\theta).$$

根据 (3) 及 (18) 可得

$$P^{-m}_n(x)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x).$$

加法定理如 11-4(8).

正交性关系式 (7) 給出

(20) $\int_{-1}^{+1}[P_n^m(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$

从 (2) 可得母函数

(21) $[1-st\cos\theta-\frac{1}{2}(1-t^2)\sin\theta]^{-1}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}(n!/k!)\,P_n^{k-n}(\cos\theta)s^n t^k.$$

P_n^m 的其他性質見 3-6-1 節.

11-5-2. 馬克斯威極論

設 x_1, x_2, x_3 为自变数, $r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$, 并定义微分算符 D_k 为

(22) $D_k=\frac{\partial}{\partial x_k}$ $\qquad k=1, 2, 3.$

由于

(23) $\Delta r^{-1}=(D_1^2+D_2^2+D_3^2)r^{-1}=0,$

顯然 $D_1^a D_2^b D_3^c r^{-1}$ 滿足拉普拉斯方程. 不僅如此,这顯然是 $n=a+b+c$ 次齐次多項式乘以 r^{-2n-1} 的形式. 最后,可以証明,对于每一个 n 次齐次多項式 H_n,

$$\Delta H_n=0 \text{ 及 } \Delta H_n r^{-2n-1}=0$$

是等价的,因此可得

(24) $D_1^a D_2^b D_3^c r^{-1}=H_n(x_1, x_2, x_3)r^{-2n-1},$ $\qquad n=a+b+c.$

这一式的一个推論是:滿足条件

(25) $D_1^2+D_2^2+D_3^2=0$

的三量 D_1, D_2, D_3 的每一个 n 次齐次多項式对应着一个 n 次的 x_1, x_2, x_3 的調和多項式. 將这与 11-7(12) 后的說明比較, 似可从(24)式得出所有的調和多項式. 实际上,可以証明[見 Hobson, 1931, 第 4 章, Nos. 85-92]

$$(26)\quad D_1^{n-m}(D_2 \pm iD_3)^m \frac{1}{r}$$

$$= \frac{(-1)^{n-m}(n-m)!}{r^{n+1}} e^{\pm im\phi} P_n^m(\cos\theta) \qquad m=0, 1, \cdots, n,$$

且

$$(27)\quad x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta\cos\phi,\ x_3 = r\sin\theta\sin\phi.$$

根据 (19) 式，这說明所有的球面調和函数可从 (24) 式得出.

根据几何上的理由，(26) 式中的面調和函数在 $m=0$ 时称为帶諧函数(或球帶調和函数)，在 $m=n$ 时称为扇諧函数(或扇形調和函数)，而在 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 时称为田諧函数(或田形調和函数).
关于这一方面及下面馬克斯威結果的說明，見 Hobson (1931) 及 Maxwell (1873, 1892).

設

$$(28)\quad \eta_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \qquad k=1, 2, \cdots, n$$

为單位矢量，它定义了單位球面上不同的点. 这些点称为極. 具有極 η_k 的 n 次面調和函数定义为

$$(29)\quad S_n(\eta_k) = (-1)^n r^{n+1}\left[\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k D_1 + \beta_k D_2 + \gamma_k D_3)\right] r^{-1}.$$

引進 n 个参数 $t_1, \cdots, t_n$，可知这就是

$$(30)\quad \frac{1}{n!} T^n P_n\left[\frac{\sum t_k(\xi, \eta_k)}{T}\right]$$

的展开式中 $t_1 t_2 \cdots t_n$ 的系数，其中

$$(31)\quad T^2 = \sum_{k,l=1}^{n} t_k t_l (\eta_k \eta_l), \qquad \xi = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r}\right),$$

且(30)中的和是就 $k=1, 2, \cdots, n$ 來取的. 这是矢量 $\xi, \eta, \cdots, \eta_k$ 之間夾角的余弦的函数. 如 η_k 与坐标系的若干軸相合，卽得标准面調和函数 (26).

Van der Pol (1936) 及 Erdélyi (1937) 曾証明

(32) $$i^{n-m}\left(\frac{\pi}{2r}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(kr)P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

$$=k^{-m}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+i\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^m P_n^{(m)}\left(\frac{-i}{k}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\frac{\sin kr}{kr},$$

因而將(26)式推廣到波动方程 $\Delta u+k^2u=0$ 的解上,这里 $P_n^{(m)}$ 表示勒上特多項式 P_n 的 m 階導数, P_n^m 見 (17), $J_{n+1/2}$ 表示 $n+1/2$ 階第一类貝塞尔函数, $r, \theta, \phi, x_1, x_2, x_3$ 的关系見 (27) 式.

11-6. $p=2, h(n,p)=(n+1)^2$ 的情形

令 $\mathfrak{y}$ 为具有四个分量的矢量,

(1) $$\mathfrak{y}=(y_1, y_2, y_3, y_4),$$

并令

(2) $$\eta=\mathfrak{y}/\rho,\ \rho=\|\mathfrak{y}\|.$$

引進矢量

(3) $$\mathfrak{u}=(i-its,\ -it-is,\ -t+s,\ 1+ts),$$

(4) $$\mathfrak{b}=(i-i\tau\sigma,\ -i\tau-i\sigma,\ -\tau+\sigma,\ 1+\tau\sigma),$$

由此有

(5) $$(\mathfrak{u},\mathfrak{u})=(\mathfrak{b},\mathfrak{b})=0,\ (\mathfrak{u},\bar{\mathfrak{b}})=2(1+t\tau)(1+s\sigma).$$

从 (5) 仍可知有 $(n+1)^2$ 个多項式 $H_n^{k,l}(\mathfrak{y})$ 都是 n 次調和多項式,由下式定义

(6) $$(\mathfrak{u},\mathfrak{y})^n=\sum_{k,l=0}^{n}\binom{n}{k}H_n^{k,l}(\mathfrak{y})t^k s^l,$$

正像 11-5-1 節的情形一样.

根据 11-5-2 節中同样的論断,可知

(7) $$\iint_{\Omega(\eta)}(\mathfrak{u},\eta)^n(\bar{\mathfrak{b}},\eta)^n\,d\Omega(\eta)=\frac{2^{1-n}\pi^2}{n+1}(\mathfrak{u},\bar{\mathfrak{b}})^n,$$

因此,面調和函数

(8) $$S_n^{k,l}(\eta)=\rho^{-n}H_n^{k,l}(\mathfrak{y})$$

組成一个有 $h(n,2)=(n+1)^2$ 个綫性無关的面調和函数的正交

系，其中

$$(9)\qquad \iint_{\Omega} S_n^{k,l}(\eta)\bar{S}_n^{k',l'}(\eta)\,d\Omega=\begin{cases}0 & k\neq k' \text{ 或 } l\neq l',\\ \dfrac{2\pi^2}{n+1}\dbinom{n}{l}\Big/\dbinom{n}{k}, & k=k',\ l=l'.\end{cases}$$

从 (6) 又可得

$$(10)\qquad \bar{S}_n^{k,l}(\eta)=(-1)^{k+l}S_n^{n-k,n-l}(\eta).$$

为了求得 $S_n^{k,l}$ 的顯式，可引入

$$(11)\qquad a=y_4+iy_1,\ b=y_3-iy_2,\ c=-y_3-iy_2,\ d=y_4-iy_1.$$

則

$$(12)\qquad \rho=\|\mathfrak{y}\|=(ad-bc)^{1/2},\ (\mathfrak{U},\mathfrak{y})=a+bs+(c+ds)t.$$

从 (6) 式得

$$(13)\qquad \sum_{l=0}^{n} H_n^{k,l}(\mathfrak{y})s^l=(a+bs)^{n-k}(c+ds)^k,$$

$$(14)\qquad H_n^{k,l}(\mathfrak{y})=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)}(a+bs)^{n-k}(c+ds)^k s^{-l-1}\,ds.$$

命

$$(15)\qquad \sigma=-s(bc-ad)/bd,$$

$$(16)\qquad \sigma_0=ad/(ad-bc)=(y_1^2+y_4^2)/(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2),$$

并將 a, b, c, d 都用 y_i 表示，則

$$(17)\qquad H_n^{k,l}(\mathfrak{y})=\frac{(-1)^k}{2\pi i}\rho^n(d/\rho)^{k+l-n}(b/\rho)^{l-k}\times\int^{(\sigma_0+)}\sigma^{n-k}(1-\sigma)^k\frac{d\sigma}{(\sigma-\sigma_0)^{l+1}},$$

$$(18)\qquad =\frac{(-1)^k}{l!}\rho^n\left(\frac{y_4-iy_1}{\rho}\right)^{k+l-n}\left(\frac{y_3-iy_2}{\rho}\right)^{l-k}\frac{d^l}{d\sigma_0^l}\sigma_0^{n-k}(1-\sigma_0)^k,$$

其中 σ_0 見 (16) 式．此处的 l 階導数可用一超比函数（是一雅可比多項式）來表示，因此，最后結果如下［見 2-8 (27)，2-1 (2) 及 (1)，(2)］．

如 $n\geqslant k+l$，則

$$(19)\quad S_n^{k,l}(\eta)=\rho^{-n}H_n^{k,l}(\mathfrak{y})$$

$$=(-1)^k\binom{n-k}{l}(\eta_4+i\eta_1)^{n-k-l}(\eta_3+i\eta_2)^{k-l}$$

$$\times{}_2F_1(-l,n-l+1;\eta-k-l+1,\eta_4^2+\eta_1^2),$$

$$(20)\quad =(-1)^k(\eta_4+i\eta_1)^{n-k-l}(\eta_3+i\eta_2)^{k-l}$$

$$\times P_l^{(n-k-l,k-l)}(\eta_3^2+\eta_2^2-\eta_4^2-\eta_1^2).$$

如 $n<k+l$, 則

$$(21)\quad S_n^{k,l}(\eta)=\rho^{-n}H_n^{k,l}(\mathfrak{y})$$

$$=(-1)^{n-l}\binom{k}{n-l}(\eta_4-i\eta_1)^{k+l-n}(\eta_3-i\eta_2)^{l-k}$$

$$\times{}_2F_1(l-n,l+1;l+k-n+1;\eta_4^2+\eta_1^2).$$

$$(22)\quad S_n^{k,l}(\eta)=\rho^{-n}H_n^{k,l}(\mathfrak{y})$$

$$=(-1)^{n-l}(\eta_4-i\eta_1)^{k+l-n}(\eta_3-i\eta_2)^{l-k}$$

$$\times P_{n-l}^{(l+k-n,l-k)}(\eta_3^2+\eta_2^2-\eta_4^2-\eta_1^2),$$

其中 $P_m^{(\alpha,\beta)}$ 表示一雅可比多項式(見第 10 章).

如用極坐标,則 $S_n^{k,l}$ 的表达式(20),(22)將非常复什;为此,最好用函数 11-2(23)($\rho=2$ 的特例).但对面調和函数的变换來說,$S_n^{k,l}$(n 为偶数)是很有用的;它們常滿足某些关系,这些关系在 $p\neq 2$ 的許多情形中是沒有的.这些关系(將在 11-7 節中証明)就是下面的一些公式(以 $H_{2n}^{k,l}$ 表示,不用 S_{2n}^{kl} 表示).

設 $\mathfrak{y},\mathfrak{z}$ 是具有四个分量的二矢量,并設 $\mathfrak{w}$ 为一矢量,其分量为

$$(23)\quad \begin{aligned} w_1&=y_1z_4+y_4z_1-y_2z_3+y_3z_2,\\ w_2&=y_2z_4+y_4z_2-y_3z_1+y_1z_3,\\ w_3&=y_3z_4+y_4z_3-y_1z_2+y_2z_1,\\ w_4&=y_4z_4-y_1z_1-y_2z_2-y_3z_3.\end{aligned}$$

如果引進四元数(見 Birkhoff 及 MacLane, 1947, 第 8 章, 5),这可寫成如下形式:

(24) $w_4+iw_2+jw_3+kw_1$

$$=(z_4+iz_2+jz_3+kz_1)(y_4+iy_2+jy_3+ky_1),$$

其中 $1, i, j, k$ 都是基本單位. 于是可得加法定理:

(25) $$H_{2n}^{k,l}(\mathfrak{w})=\sum_{m=0}^{2n}H_{2n}^{k,m}(\mathfrak{z})H_{2n}^{m,l}(\mathfrak{y}).$$

矩陣

(26) $$[H_{2n}^{k,l}(\mathfrak{y})], \qquad k, l=0, 1, \cdots, 2n$$

的行列式为

(27) $$(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)^{n(2n+1)},$$

这里的 k 表示行, l 表示列,特征根为

(28) $$\lambda_1^m\lambda_2^{2n-m}, \qquad m=0, 1, \cdots, 2n.$$

其中 λ_1 及 λ_2 为方程[見(4)]

(29) $$\begin{vmatrix} a-\lambda, b \\ c, d-\lambda \end{vmatrix}=0$$

的根. 又跡为

(30) $$\sum_{l=0}^{2n}H_{2n}^{l,l}(\mathfrak{y})=\frac{\rho^{2n}}{2n+1}T'_{2n+1}(y_4/\rho),$$

这里 T'_{2n+1} 为車比雪夫多項式 11-1(20) 的導数.

11-7. 球面調和函数的变换公式

設 $\mathfrak{y}$ 为具有四个分量的矢量, $\mathfrak{x}$ 为具有三个分量的矢量. 我們采用下面的記法:

(1) $$\|\mathfrak{x}\|_3=r, \|\mathfrak{y}\|_4=\rho, \xi=\mathfrak{x}/r, \eta=\mathfrak{y}/\rho.$$

現在我們將証明: $\mathfrak{x}$ 的每一个具有行列式 $+1$ 的正交变换 O 可由一單位矢量 η 來唯一地說明. 如 $\det O=+1$, 則必有一个矢量 $\mathfrak{x}_0\neq 0$ (轉軸) 存在,滿足条件:

(2) $$\mathfrak{x}_0=O\mathfrak{x}_0.$$

如已知 $\mathfrak{x}_0$ 及旋轉的角 ψ, 則可完全定义出变换 O. 由于 $-\mathfrak{x}_0$ 也是一旋轉軸, 故可选擇 $\mathfrak{x}_0$ 使 $0\leqslant\psi\leqslant\pi$. 如 ψ 等于零, 則每一个矢量

$\mathfrak{x}_0$ 都是一旋轉軸,在这种情况下可令 $\mathfrak{x}_0=0$, 因此可設

(3) $\quad \|\mathfrak{x}_0\|_3=\sin \frac{1}{2}\psi, \qquad 0\leqslant\psi\leqslant\pi.$

这就是說 $\mathfrak{x}_0$ 的三分量 $x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}$ 为

$$x_{0,l}=\cos\alpha_l\sin\tfrac{1}{2}\psi, \qquad l=1,2,3$$

此处 α_l 是旋轉軸与 x_l 軸之間的夾角.

現在我們定义四維單位矢量如下:

(4) $\quad \eta=(\cos\alpha_1\sin\frac{1}{2}\psi, \cos\alpha_2\sin\frac{1}{2}\psi, \cos\alpha_3\sin\frac{1}{2}\psi, \cos\frac{1}{2}\psi),$

并令 $\mathfrak{y}=\rho\eta$. 則正交矩陣 O 可寫成

(5) $\quad O=(y_4I-A)(y_4I+A)^{-1}=(1/\rho^2)(\rho^2I-2y_4A+2A^2),$

(6) $$=\frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} y_4^2+y_1^2-y_2^2-y_3^2, & 2y_1y_2-2y_3y_4, & 2y_1y_3+2y_2y_4 \\ 2y_1y_2+2y_3y_4, & y_4^2+y_2^2-y_1^2-y_3^2, & 2y_2y_3-2y_1y_4 \\ 2y_1y_3-2y_2y_4, & 2y_2y_3+2y_1y_4, & y_4^2+y_3^2-y_1^2-y_2^2, \end{pmatrix}$$

其中

(7) $$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix}0&y_3&-y_2\\-y_3&0&y_1\\y_2&-y_1&0\end{pmatrix}.$$

这是正交羣的卡萊表示式(見 H. Weyl, 1939, p. 169ff). (6) 式永远正确,無例外,也就是說即使 y_4I+A 的行列式等于零时也成立.

应用 (1), (2), (4), (5), 11-5(18), 11-5(19), 11-6(8) 各式的記法,就有下面的:

球面調和函数的变換公式

(8) $$S_n^k(O\xi)=\sum_{l=-n}^{n}(-1)^{k+l}\binom{2n}{n+k}\Big/\binom{2n}{n+l} \times S_{2n}^{n+k,n+l}(\eta)S_n^l(\xi).$$

这一公式說明了三維空間的正交变换 O 对球上面調和函数所生的影响,它給出了 S_n^k 的綫性变換的系数,以四維空間中的面調和函数表示,該函数以 O 的卡萊参数作为变量.

Adam 許密特(1899)証明了一个等价于(8)的公式(見 Hoenl, 1934). 在彼得曼遺下的未刊印的稿件中,証明了 (8) 式中的 S_n^l 的系数可由超比級数表示. 現在的 (8) 的形式是 Herglotz 所提出,他的証明如下.

为了証明 (8), 我們先說明

(i) 我們可將調和多項式 $H_n^m(\mathfrak{x})$ 映射成二变量 w_1, w_2 的冪的積,这可令

(9) $x_1 = w_1 w_2,\ x_2 + ix_3 = w_1^2,\ -x_2 + ix_3 = w_2^2,$

从此, 11-5(2) 变为

(10) $$(w_1^2 - 2w_1 w_2\, t + w_2^2 t^2)^n = \sum_{m=-n}^{n} H_n^m(\mathfrak{x}) t^{n+m},$$

因此

(11) $$H_n^m(\mathfrak{x}) = (-1)^m \binom{2n}{n+m} w_1^{n-m} w_2^{n+m}.$$

这里在 x_1, x_2, x_3 之間有如下的关系

(12) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$

[参看 11-5(25)], 从 (11) 式可見綫性独立的調和多項式的全集 $H_n^m(\mathfrak{x})$ 映成了 w_1 及 w_2 的冪的綫性無关的積的集合.

(ii) 如以 11-6(11) 定义 a, b, c, d 各数,則綫性代換

(13) $w_1' = aw_1 + bw_2,\ w_2' = cw_1 + dw_2$

將導出 w_1, w_2, w_1^2, w_2^2 的代換,为

(14) $$\begin{aligned} w_1' w_2' &= (ad+bc) w_1 w_2 + ac\, w_1^2 + bd\, w_2^2, \\ w_1'^2 &= 2ab\, w_1 w_2 + a^2 w_1^2 + b^2 w_2^2, \\ w_2'^2 &= 2cd\, w_1 w_2 + c^2 w_1^2 + d^2 w_2^2. \end{aligned}$$

如再令 $w_1' w_2' = x_1',\ w_1'^2 = x_2' + ix_3',\ w_2'^2 = -x_2' + ix_3'$, 并設

$$ad - bc = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1,$$

則 (14) 式就恰好是綫性代換

(15) $\mathfrak{x}' = O\mathfrak{x};\ \mathfrak{x}' = (x_1', x_2', x_3'),$

其中 O 如 (6), 这是三元正交羣用單式二元代換來表示的公式(参

看 Van der Waerden, 1932, 第 3 章, 16),

(iii) 应用 11-6(11) 中 a, b, c, d 的表达式及 $s=w_2/w_1$, 可从 11-6(13) 式得

$$(16)\quad \sum_{l=0}^{2n} H_{2n}^{k,l}(\mathfrak{y}) w_1^{2n-l} w_2^l = (aw_1+bw_2)^{2n-k}(cw_1+dw_2)^k,$$

如 $\|\mathfrak{y}\|=1$, 则从 (11), (13), (14), (15), (16) 及 (6) 可得公式 (8).

(8)式可認为是正交羣的表示式,而公式 11-6(25)至 11-6(30) 就是这一事实的結論 (这里所用的概念可参看 H. Weyl, 1939). 特别是, 11-6(30) 是下列事实的結論, 那就是 $\det O=1$ 的正交矩陣 O 的特征根可用旋轉的角, 卽用 y_4/ρ 來完全确定. 由于一个对应于正交羣表示式中的 O 的矩陣 U 的特征根只依賴于 O 的特征根, 故知 U 的跡 (它是 U 的特征根的負值和) 应只依賴于 y_4/ρ. 根据預备定理 1, 11-6 (30) 式右边的表达式及其倍数是滿足这一条件的唯一面調和函数.

Y. Satô (1950) 將变换 O 表示为三个簡單变換的積, 对这些变换式証明了方程 (8), 并給出了 (8) 式中 $n\leqslant 7$ 的系数表.

11-8. 漢米特-康拜·特·范利多項式

研究面調和函数的另一方法是漢米特, 达頓及康拜·特·范利所提出. 这些作者的許多重要理論在 Appell 及 Kampé de Fériet (1926)著作的第二部分中有詳細的介紹. 这里不能將全部結果詳細列出, 只能略举一二, 詳細研究时可参看上述著作.

推廣馬克斯威構作三維空間的面調和函数的方法, 我們來定义具有 $p+2$ 个分量的矢量 $\mathfrak{x}$ 的函数如下:

$$(1)\quad w_{m_1,\cdots,m_p}(\mathfrak{x}) = \frac{(-1)^n}{m_1!\cdots m_p!}\ \frac{\partial^n}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_p^{m_p}}(r^{-p}),$$

其中 $r=\|\mathfrak{x}\|$, $m_1, \cdots, m_p$ 是非負整数, 滿足条件

$$(2)\quad m_1+m_2+\cdots+m_p=n.$$

(1) 式左边的函数满足拉普拉斯方程，它是

(3) $\quad a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_p^{m_p}$

的系数，出現在

(4) $\quad [(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_p - a_p)^2 + x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2]^{-\frac{1}{2}p}$

展开为 $a_1 \cdots a_p$ 的冪的積的級数中.

于是

(5) $\quad V_{m_1, \cdots, m_p}(\xi_1, \cdots, \xi_p) = r^{n+p} w_{m_1, \cdots, m_p}(\mathfrak{x})$

是 n 次的面調和函数，依賴于 $\mathfrak{x}/r$ 的前 p 个分量. 它的母函数为

(6) $$(1 - 2a_1 \xi_1 - \cdots - 2a_p \xi_p + a_1^2 + \cdots + a_p^2)^{-\frac{1}{2}p}$$
$$= \sum a_1^{m_1} \cdots a_p^{m_p} V_{m_1, \cdots, m_p}(\xi_1, \cdots, \xi_p),$$

式中的和应对所有的非負整数 $m_1, \cdots, m_p$ 來求. 函数 V 的顯表示式及以 p 个变量的超比函数表示的表达式參看 Appell-Kampé de Fériet (1926). 与特种球多项式的关系如下:

(7) $$\sum a_1^{m_1} \cdots a_p^{m_p} V_{m_1, \cdots, m_p}(\xi_1, \cdots, \xi_p)$$
$$= (a_1^2 + \cdots + a_p^2)^{\frac{1}{2}n} C_n^{\frac{1}{2}p}\left[\frac{a_1 \xi_1 + \cdots + a_p \xi_p}{(a_1^2 + \cdots + a_p^2)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

式中的和是对所有满足 (2) 式的非負整数 $m_1, \cdots, m_p$ 來求的. 从上式可得遞推关系式.

应用定义

(8) $$V^{(s)}_{m_1, \cdots, m_q}(\xi_1, \cdots, \xi_q)$$
$$= V_{m_1, \cdots, m_q, 0, \cdots, 0}(\xi_1, \cdots, \xi_q, \cdots, \xi_{q+s-1})$$

其中 $s, q = 1, 2, 3, \cdots$, 就可証明函数

(9) $\quad (1 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_p^2)^{\frac{1}{2}l} e^{\pm il\phi} V^{(2l+1)}_{l_1, \cdots, l_p}(\xi_1, \cdots, \xi_p)$

組成綫性無关的 n 次面調和函数的完全系，其中 $l, l_1, \cdots, l_p$ 是非負整数，满足条件

(10) $\quad l + l_1 + \cdots + l_p = n,$

且

(11) $$e^{i\phi}=(\xi_{p+1}+i\xi_{p+2})(1-\xi_1^2-\cdots-\xi_p^2)^{-1/2}$$
$$=(\xi_{p+1}+i\xi_{p+2})(\xi_{p+1}^2+\xi_{p+2}^2)^{-1/2}.$$

(11)式中的函数并不組成單位球上的正交系；積分

$$\iint\limits_{\Omega}(1-\xi_1^2-\cdots-\xi_p^2)^l V_{l_1,\cdots,l_p}^{(2l+1)} V_{m_1,\cdots,m_p}^{(2l+1)} d\Omega,$$

只在

$$l_1+\cdots+l_p\neq m_1+\cdots+m_p,$$

或所有差分 $l_1-m_1, \cdots l_p-m_p$ 是奇数时才能等于零．因此，可引進另一个函数 U 的集，由母函数

(12) $$\sum a_1^{m_1}\cdots a_p^{m_p} U_{m_1,\cdots,m_p}^{(l)}(\xi_1,\cdots,\xi_p)$$
$$=[(a_1\xi_1+\cdots+a_n\xi_n-1)^2+(a_1^2+\cdots+a_p^2)$$
$$\times(1-\xi_1^2-\cdots-\xi_p^2)]^{1/2 l},$$

所生成．这些函数是 $p+l+1$ 維空間的面調和函数，而 U 及 V 共同組成一双正交系，因此

(13) $$\iint\limits_{\Omega}(1-\xi_1^2-\cdots-\xi_p^2)^{1/2 l-1/2} V_{l_1,\cdots l_p}^{(l)} U_{m_1,\cdots,m_p}^{(l)} d\Omega=0,$$

除非 $m_1=l_1, m_2=l_2, \cdots, m_p=l_p$. 这样，函数 U 就可用以确定超球面上一个函数（特別是一給定次的超曲面調和函数）的展开式的系数，用函数 (11) 來表示．

有关于函数 U 及 V 的很多其他結果，特別是偏微分方程、以劳列西拉廣义超比級数表示的表达式及任意函数展为 U 及 V 的展开式見 Appell-Kampé de Fériet (1926). 对于 l 不是一正整数时的 $V_{m_1,\cdots,m_p}^{(l)}$ 的推廣見 A. Angelescu.

与拉普拉斯算符以外的一些算符相关的廣义面調和函数，曾由 M. H. Protter 研究过．

参 考 文 献

Angelescu, Aurel, 1916: *Sur les polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des integrales multiples.* Thèse no. 1579, Paris.

Appell, Paul and J. Kampé de Fériet, 1926: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Polynomes d'Hermite*, Gauthier-Villars.

Birkhoff, Garrett and Saunders MacLane, 1947: *A survey of modern algebra*, New York.

Erdélyi, Arthur, 1937: *Physica* 4, 107-120.

Erdélyi, Arthur, 1938: *Math. Ann.* 115, 456-465.

Funk, Paul, 1916: *Math. Ann.* 77, 136-152.

Gegenbauer, Leopold, 1877: *Akad. Wiss. Wien., S.-B.* II*a*, 75, 891-905.

Gegenbauer, Leopold, 1884: *Denkschriften Akad. Wiss. Wien. Math. Naturw. Kl.* 48, 293-316.

Gegenbauer, Leopold, 1888: *Akad. Wiss. Wien., S.-B.* II*a*. 97, 259-270.

Gegenbauer, Leopold, 1890: *Denkschriften Akad. Wiss. Wien. Math. Naturw. Kl.* 57, 425-480.

Gegenbauer, Leopold, 1891: *Akad. Wiss. Wien., S.-B.* II*a*, 100, 225-244.

Gegenbauer, Leopold, 1893: *Akad. Wiss. Wien., S.-B.* II*a*, 102, 942-950.

Hecke, Erich, 1918: *Math. Ann.* 78, 398-404.

Hobson, E. W., 1931: *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge.

Hoenl, H., 1934: *Z. Physik* 89, 244-253.

Kogbetliantz, Ervand, 1924: *J. Math. Pures Appli.*, IX Ser., 3, 107-187.

Koschmieder, Lothar, 1929: *Math. Ann.* 101, 120-125.

Koschmieder, Lothar, 1931: *Math. Ann.* 104, 387-402.

Magnus, Wilhelm, 1949: *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 16, 77-94.

Maxwell, J. C., 1873, 1892: *A treatise on electricity and magnetism*, Vol. 1, Chapter 9, Oxford, Third edition 1892.

Nielsen, Niels, 1911: *Théorie des Fonctions Métasphériques*, Gauthier-Villars.

Pólya, George and Burnett Meyer, 1950: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228, 28-30, 1083-1084.

Protter, M. H., 1949: *Trans. Amer. Math. Soc.* 63, 314-341.

Satô, Yasuo, 1950: *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* 28, 1–22, 175–217.

Schmidt, Adam, 1899: *Z. Math. Phys.* 44, 327–338.

Sommerfeld, Arnold, 1943: *Math. Ann.* 119, 1–20.

Van der Pol, Balthasar, 1936: *Physica* 3, 385–392.

Van der Waerden, B. L., 1932: *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Berlin.

Weyl, Hermann, 1939: *The classical groups*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Widder, D. V., 1947: *Advanced calculus*, New York.

第十二章　多变量正交多項式

12-1. 引言

設 R 是 n 維欧氏空間的一个域，其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是笛卡尔坐标，并設 $w(x)=w(x_1,\cdots,x_n)$ 为定义于 R 上的一个非負权函数．对于任意二个函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 及 $g(x_1,\cdots,x_n)$，令

$$(1)\qquad (f,g)=\int\cdots\int_R f(x_1,\cdots,x_n)\,g(x_1,\cdots,x_n)\,w(x_1,\cdots,x_n)\times dx_1\cdots dx_n,$$

称之为 f 及 g 的标積；只要 f 及 g 定义于 R，且積分存在，它就有定义．两个函数，如果它們的标積等于零，則称为是正交的(关于权函数 w)，

給定一个权函数及綫性無关的函数 $\psi_1, \psi_2, \cdots$ 的任一序列，如果对于这些函数來說，所有标積 (ψ_i, ψ_j) 都有定义，則 10-1 節中所述正交化步驟可关于标積 (1) 進行，从而導出一个正交系，除了每个函数中有一常数因子外，这一系是唯一地确定的．在函数的多重序列中却并不如此．在对多重序列進行正交化之前，应先將它重行排列为一簡單序列．每一个可能的排列对应着一个正交系，一般說來，不同的排列將引出不同的正交系．因此，一个多重序列一般并不能唯一地确定一个正交系（主要的）；而且在許多情形下，重行排列將破坏多重序列的对称性．根据这些理由，在一給定的綫性無关函数的多重序列

$$\{\psi_{m_1,\cdots,m_n}(x_1,\cdots,x_n)\}$$

的情形下，通常最好作出二个多重序列

$$\{\phi_{m_1,\cdots,m_n}(x_1,\cdots,x_n)\}\ 及\ \{\chi_{m_1,\cdots,m_n}(x_1,\cdots,x_n)\},$$

它們組成一双正交系，即積分

$$(\phi_{m_1,\cdots,m_n}, \chi_{m_1',\cdots,m_n'}),$$

除了在 $m_1=m_1', m_2=m_2', \cdots m_n=m_n'$ 的情形以外，都等于零．双正交系对用以保持对称性的选擇提供了較大的自由．

这些說明在处理正交多項式的时候也是適用的．为了把單項式的多重序列

(2) $\quad x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}, \qquad\qquad m_1, m_2, \cdots, m_n=0, 1, \cdots$

正交化，就必須將單項式排成一个簡單的序列．除了十分特殊的域及权函数以外，沒有(主要的)唯一的正交多項式系，而任一从單項式 (2) 的排列中得出的正交多項式系必須是在 $x_1, \cdots, x_n$ 中非对称的．变量的等定可用一双正交多項式系來保持．

关于多变量的正交多項式的一般理論，所知尙不多．对应于單变量經典正交多項式的特种双正交系是已知的，而且已有相当詳細的研究．Appell 及 Kampé de Fériet 的著作对 1925 年以前这一方面的研究有詳細的叙述，幷有很多的書目．

在本章中，我們將对二变量的正交多項式的一般性質作簡略的介紹，而后較詳細地來討論对应于單变量經典正交多項式系的二变量或多变量的双正交多項式系，这些双正交系也是單变量經典正交系的推廣．有許多地方要涉及到第 10 章及第 11 章．

12-2. 二变量正交多項式的一般性質

二变量正交多項式的一般性質曾由爵克生 (1937) 作了研究，他还研究了三变量及二复变量的正交多項式 (Jackson, 1938, 1938 a)．在这一節和 12-3 節中，我們將只限于討論二个实变量的情形．关于 n 变量的正交多項式的对应性質，將留給讀者自己研究．

給定 x, y 平面上的一个域 R 及一个非負权函数 $w(x, y)$，它們都是固定的，在域有界的情形下，我們將假設 w 在 R 上可積，而在域 R 無界时，將假設所有的積分

(1) $$\iint_R w(x, y)x^m y^n \, dx \, dy, \qquad m, n=0, 1, \cdots$$

收斂．所有正交性質、規格化等等都应理解为是关于标積

(2) $$(f, g)=\iint_R f(x, y)g(x, y)w(x, y)dx \, dy$$

來提的．由于 f 及 g 都是多項式，故知 (2) 中的積分一定存在．

單項式 $x^m y^n$ 將按下列的序

(3) $x^m y^n$ 將高于 $x^k y^l$，如

$$m+n>k+l$$

或 $$m+n=k+l, \text{ 而 } m>k.$$

單項式的有序序列为

(4) $$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, \cdots$$

次序 (3) 引出了 x, y 多項式的一个部分的次序．我們說多項式 $q(x, y)$ 高于 $p(x, y)$，如果 q 的最高次單項式（系数不等于零）高于 p 的任一單項式（系数不等于零）．

应当注意，次序 (3) 是任意的，关于 x 及 y 不对称．下面所述的正交多項式將以 (3) 为根据．一般說來，不同的序將組成不同的正交多項式系．

对序列 (4) 应用 10-1 節所述的正交化步驟，其中标積由 (2) 式定义，可得一正交多項式序列，如下：

(5) $$q_{00}, q_{10}, q_{11}, q_{20}, q_{21}, q_{22}, q_{30}, q_{31}, \cdots$$

因此 $q_{nm}(x, y)$ 是 x, y 的 n 次多項式，而單独对 y 來說則是 m 次的，$n=0, 1, 2, \cdots, m=0, 1, \cdots, n$．規格化正交性質为

(6) $$(q_{nm}, q_{kl})=\delta_{kn}\delta_{lm},$$

这里 $r\neq s$ 时，$\delta_{rs}=0$；$r=s$ 时，$\delta_{rs}=1$；而 q_{nm} 將高于 q_{kl} 如 $n>k$ 或 $n=k$ 而 $m>l$．

共有 $n+1$ 个 x, y 的 n 次多項式，即

$$q_{n0}, q_{n1}, \cdots, q_{nn}.$$

任一 n 次多項式，如与較低次的所有多項式正交，則必为 $q_{n0}, \cdots, q_{nn}$ 的綫性組合．注意，这样的一个多項式并不須与所有較低次多項式都正交[这里所説的較低，其意义見(3)]．

应用任一实数正交常数矩陣 $[c_{ij}]$，其中

(7) $$\sum_{j=0}^{n} c_{ij} c_{kj} = \delta_{ik}, \qquad i, k = 0, 1, \cdots, n,$$

則多項式

(8) $$p_{ni}(x, y) = \sum_{j=0}^{n} c_{ij} q_{nj}(x, y), \qquad i = 0, 1, \cdots, n,$$

是互相正交、規格化且与較低次的所有多項式正交(但不是与所有較低次的多項式正交)．反过來，任意 $n+1$ 个相互正交、規格化而与較低次的所有多項式正交的多項式都可用(8)的形式來表示，其中 c_{ij} 滿足(7)．注意在 $p_{ni}(x, y)$ 中，下标 n 表示 x 及 y 的次数，但下标 i 并不表明 y 的次数．

如果有一仿射变換

(9) $$x' = \alpha x + \beta y, \; y' = \gamma x + \delta y, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

它把 R 映成本身，而保持权函数不变．对于每一个 n，

$$p_{n0}(x', y'), \; p_{n1}(x', y'), \; \cdots, \; p_{nn}(x', y')$$

組成一 $n+1$ 个相互正交而規格化的多項式系，它与較低次的所有多項式正交．因此，$p_{ni}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ 可用 $q_{ni}(x, y)$ 因而是 $p_{ni}(x, y)$ 的一个实数正交变換來得出．一个仿射变換(9)，在这个变換下 R 及 w 保持不变，对于每一个 n 將引出一个 $p_{n0}, \cdots, p_{nn}$ 的正交变換．p_{ni} 的不同的系(同样的 R, w, n 及 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$)經受类似的变換；对应于保持 R 及 w 不变的仿射变換(9)的一个羣，对于每一个 n，有一个正交变換羣．詳細研究及对 A. Sobczyk 著作的説明，可参看 Jackson (1937)．

如 R 为一矩形，即

(10) $$a \leqslant x \leqslant b, \; c \leqslant y \leqslant d,$$

且 $w(x, y)=u(x)v(y)$，則可取

(11)　$p_{ni}(x, y)=p_{n-i}(x)q_i(y),\qquad i=0, 1, \cdots, n; n=0, 1, \cdots,$

其中 $\{p_n\}$ 是区間 (a, b) 上与权函数 u 連帶的正交多项式系，$\{q_n\}$ 为区間 (c, d) 上与权函数 v 連帶的正交多項式系．

12-3．二变量正交多項式的其他性質

設 $\{p_{ni}(x, y)\}$ 为域 R 上的正交多項式系，具有 12-2(8) 的形式，其权函数为 w．对于每一个 i，$p_{ni}(x, y)$ 是 x 及 y 的 n 次多項式，而任一 n 次多項式都可表达为 $p_{mi}(x, y)$，$0\leqslant i\leqslant m$，$0\leqslant m\leqslant n$ 的綫性組合．單变量正交多項式中有几种一般性質（見 10-3 節）在二变量情形中也有类似之处，但对应的公式要較为复什．

首先，我們來証明一种遞推关系，它把 $(ax+by)\,p_{ni}(x, y)$ 表达为 $n+1$，n 及 $n-1$ 次多項式的綫性組合．这一关系的証明类似于 10-3(7) 式的証明．对于固定的 n, i，積

$$(ax+by)\,p_{ni}(x, y)$$

是一 $n+1$ 次多項式，因此它具有如下形式

$$(1)\qquad (ax+by)\,p_{ni}(x, y)=\sum_{m=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}\,p_{mj}(x, y),$$

$$(2)\qquad \gamma_{mj}=\iint\limits_R (ax+by)\,p_{ni}(x, y)\,p_{mj}(x, y)\,w(x, y)\,dx\,dy.$$

由于 $(ax+by)\,p_{mj}(x, y)$ 是 $m+1$ 次多項式，而 p_{ni} 是与低于 n 的某一次的所有多項式正交的，故知

$$(3)\qquad \gamma_{mj}=0,\qquad m=0, 1, \cdots, n-2.$$

这样，在 (1) 式中实际存在的应只有对应于 $m=n-1, n, n+1$ 的項．

究竟 p_{ni}，也就是說 12-2(8) 中的 c_{ij}，应該怎样选擇而后可得出簡單的遞推关系，到現在似尚不知道．而滿足上面所說的那

一类遞推关系的多項式系在什么条件下是对应于一个非負权函数的正交多項式系[見 10-3(9) 下面的說明],似也尙不清楚.

像在單变量的情形中一样,上述遞推关系可用以導出一个对应于克列司托費耳-达布克司公式的关系式. 取 p_{ni} 如 12-2(8) 所示,我們可以作出

(4) $$K_n(x, y, u, v)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} p_{ki}(x, y)p_{ki}(u, v),$$

(5) $$\begin{aligned}L_n(x, y, u, v)&=K_n(x, y, u, v)-K_{n-1}(x, y, u, v)\\&=\sum_{i=0}^{n} p_{ni}(x, y)p_{ni}(u, v),\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}M_n(x, y, u, v, r, s)&=L_{n+1}(u, v, r, s)L_n(x, y, r, s)\\&\quad-L_n(u, v, r, s)L_{n+1}(x, y, r, s).\end{aligned}$$

注意这里 p_{ni} 虽然在每一 i 的正交变换上是任意的, 但(4)至(6)式所定义的多項式則是由权函数 $w(x, y)$ 及域 R 所唯一确定的. "克列司托費耳-达布克司公式"为

(7) $$\begin{aligned}&[(au+bv)-(ax+by)]K_n(x, y, u, v)\\&\quad=\iint_R (ar+bs)M_n(x, y, u, v, r, s)w(r, s)dr\,ds.\end{aligned}$$

上式的証明見 Jackson (1937).

二变量正交多項式的極小性質見 Gröbner (1948).

三角形中的正交多項式

12-4. 阿貝尔多項式

設 T 为三角形

(1) $$x>0, y>0, x+y<1,$$

且

(2) $$t(x)=x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}$$

为对应的权函数. 如

(3)　$\operatorname{Re}\gamma>0,\ \operatorname{Re}\gamma'>0,\ \operatorname{Re}\alpha>\operatorname{Re}(\gamma+\gamma')-1,$

則权函数是可積的，但有很多形式結果并不受这一条件的約束.

阿貝尔 (1881) 引入下面的多項式

(4)　$$\mathfrak{Z}_{mn}(\alpha,\gamma,\gamma',x,y)=(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}\frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m(\gamma')_n}\times\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}]$$

它与雅可比多項式类似[見 10-8(10)]. 这里，以及在本章中，

(5)　$$(\alpha_0)=1,\ (\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1),\qquad n=1,2,\cdots,$$
$$(\alpha)_\nu=\Gamma(\alpha+\nu)/\Gamma(\alpha).$$

这些多項式的詳細研究，以及有关文献，可参看 Appell 及 Kampè de Fériet (1926, 第 6 章及書目).

从 (4) 式可以看出 $\mathfrak{Z}_{mn}$ 是 x 及 y 的 $m+n$ 次多項式. 以阿貝尔超比級数 F_2 來表示的 $\mathfrak{Z}_{mn}$ 的表达式如 5-13(1).

在标積的定义式 12-1(1) 中，用域 (1) 及权函数 (2)，就得

$$(\gamma)_m(\gamma')_n(P,\mathfrak{Z}_{mn})=\iint_T P(x,y)\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\times[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}]\,dx\,dy,$$

重复作分部積分后可知 $\mathfrak{Z}_{mn}$ 与低于 $m+n$ 的某一次的所有多項式都正交. 特别是

(6)　$$(\mathfrak{Z}_{mn},\mathfrak{Z}_{kl})=0,\qquad m+n\neq k+l.$$

另一方面，重复作分部積分后有

(7)　$$(\mathfrak{Z}_{mn},\mathfrak{Z}_{kl})=\frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n}\frac{\partial^{m+n}\mathfrak{Z}_{kl}}{\partial x^m\partial y^n}\times\iint_T x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}dx\,dy$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha+m+n+1-\gamma-\gamma')}{\Gamma(\alpha+2m+2n+1)}(-1)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}\mathfrak{Z}_{kl}}{\partial x^m\partial y^n}$$
$$m+n=k+l,$$

由于上式并不等于零，故知 $\mathfrak{Z}_{mn}$ 并不能組成一正交系．对于权函数 (2) 來說，到現在似尙不知有正交多項式系或双正交多項式系．

应用公式 5-13(1), 5-11(8), 5-9(10) 可以導出

$$(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}\mathfrak{Z}_{mn}(\alpha,\gamma,\gamma',x,y)$$

所滿足的偏微分方程組．采用記法

$$(8)\qquad p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ \ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\ \ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

則有

$$(9)\qquad \begin{aligned} &x(1-x)r-xys+[\gamma-(2\gamma+\gamma'-\alpha-n+1)x]p\\ &\quad-(\gamma+m)yq-(\gamma+m)(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n)z=0,\\ &y(1-y)t-xys+[\gamma'-(\gamma+2\gamma'-\alpha-m+1)y]q\\ &\quad-(\gamma'+n)xp-(\gamma'+n)(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n)z=0. \end{aligned}$$

如 $\alpha=\gamma+\gamma'$，則权函数 (2) 簡化为

$$(10)\qquad t_0(x)=x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1},\qquad\qquad \operatorname{Re}\gamma,\ \operatorname{Re}\gamma'>0.$$

阿貝尔 (1882) 就这一权函数研究了二組多項式系：

$$(11)\qquad \begin{aligned} F_{mn}(\gamma,\gamma',x,y)&=\mathfrak{Z}_{mn}(\gamma+\gamma',\gamma,\gamma',x,y)\\ &=\frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m(\gamma')_n}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{m+n}]\\ &=F_2(-m-n,\gamma+m,\gamma'+n,\gamma,\gamma';x,y), \end{aligned}$$

$$(12)\qquad E_{mn}(\gamma,\gamma',x,y)=F_2(\gamma+\gamma'+m+n,-m,-n,\gamma,\gamma';x,y),$$

这里 F_2 是由 5-7(7) 式所定义的級数．F_{mn} 及 E_{mn} 所滿足的偏微分方程，可用 5-9(10) 來導出．它們是

$$(13)\qquad \left.\begin{aligned} &x(1-x)r-xys+[\gamma-(\gamma-n+1)x]p-(\gamma+m)yq\\ &\quad+(m+n)(\gamma+m)z=0,\\ &y(1-y)t-xys+[\gamma'-(\gamma'-m+1)y]q-(\gamma'+n)xp\\ &\quad+(m+n)(\gamma'+n)z=0, \end{aligned}\right\}F_{mn},$$

$$
\left.\begin{aligned}
(14)\quad & x(1-x)r - xys + [\gamma - (\gamma+\gamma'+n+1)x]p \\
& \quad + myq + m(\gamma+\gamma'+m+n)z = 0, \\
& y(1-y)t - xys + [\gamma' - (\gamma+\gamma'+m+1)y]q \\
& \quad + nxp + n(\gamma+\gamma'+m+n)z = 0,
\end{aligned}\right\} E_{mn},
$$

將每一对相加，就可知 F_{mn} 及 E_{mn} 同时满足偏微分方程

$$
(15)\quad x(1-x)r - 2xys + y(1-y)t + [\gamma - (\gamma+\gamma'+1)x]p \\
+ [\gamma' - (\gamma+\gamma'+1)y]q + (m+n)(\gamma+\gamma'+m+n)z = 0,
$$

应用这一偏微分方程，就可証明

$$
(16)\quad \iint_T x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}F_{mn}(\gamma,\gamma',x,y)E_{kl}(\gamma,\gamma',x,y)\,dx\,dy
$$

除了在 $m=k$ 及 $n=l$ 时以外，都等于零．这説明多項式系 (11) 及 (12) 在域 (1) 上以权函数 (10) 組成一双正交系．

Appell 及 Kampé de Fériet (1926, p 110, 111) 曾証明了下面的公式

$$
(17)\quad \iint_T x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}F_{mn}(\gamma,\gamma',x,y)E_{kl}(\gamma,\gamma',x,y)\,dx\,dy \\
= \frac{\delta_{mk}\delta_{nl}}{\gamma+\gamma'+2m+2n}\,\frac{m!\,n!\,(m+n)!\,\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{(\gamma)_m(\gamma')_n\Gamma(\gamma+\gamma'+m+n)},
$$

应用这一公式，就可以計算任意函数展开为 F_{mn} 級数或 E_{kl} 級数时的系数．下面就是这种展开式的二个例子：

$$
(18)\quad F_{mn}(\gamma,\gamma',x,y) \\
= \sum_{k+l=m+n} \frac{(k+l)!\,(\gamma+m)_k(\gamma'+n)_l}{k!\,l!\,(\gamma+\gamma'+k+l)_{k+l}} E_{kl}(\gamma,\gamma',x,y),
$$

$$
(19)\quad (1-x-y)^{\lambda-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}(\gamma+\gamma'+2m+2n) \\
\times \frac{(1-\lambda)_{m+n}(\gamma)_m(\gamma')_n\Gamma(\lambda)\Gamma(\gamma+\gamma'+m+n)}{m!\,n!\,(m+n)!\,\Gamma(\gamma+\gamma'+\lambda+m+n)} \\
\times E_{mn}(\gamma,\gamma',x,y),
$$

(Appell 及 Kampé de Fériet, 1926, p 112, 113)．在 (18) 式中，

和是按所有非負整数 k 及 l 來求的，这里 $k+l=m+n$.

如 $\gamma=\gamma'=1$, $\alpha=2$, 則权函数为一常数，这时的情形可参看 Gröbner (1948, 第 5 節).

圓及球中的正交多項式

12-5. 多 項 式 V

在本節及下節中，我們將用类似于 11 章中所用的記法.

(1) $\mathfrak{x}=(x_1, \cdots, x_n)$

是一矢量，在 n 維(实)欧氏空間中具有(实)分量 $x_1, \cdots, x_n$, 且

(2) $\|\mathfrak{x}\|=r=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$

为这一矢量的長度. 二矢量

(3) $\mathfrak{a}=(a_1, \cdots, a_n)$, $\mathfrak{x}=(x_1, \cdots, x_n)$

有标積

(4) $(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})=a_1 x_1+\cdots+a_n x_n$,

及夾角 θ, 这里

$$\cos\theta=\frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})}{\|\mathfrak{a}\|\,\|\mathfrak{x}\|}.$$

[二矢量的标積 (4) 应与 (17), 12-6(4) 及类似关系中二函数的标積有所区别]. 在所論空間中，單位球 $\|\mathfrak{x}\|<1$ 記为 S, 体積元素記为 dx, 因此

$$\int_S f(\mathfrak{x})\,dx,$$

將表示

$$\underset{x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1,}{\int\cdots\int} f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_1\cdots dx_n.$$

現在來考察域 S 上的正交多項式，权函数为

(5) $(1-r^2)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}=(1-x_1^2-\cdots-x_n^2)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}$.

如 $n=2$，则域是平面上的一个圆，如 $n=3$，则是三維空間的一球，如 $n>3$，则是一超球面.

多項式

(6) $$V_m^s(\mathfrak{x})=V^s_{m_1,\cdots,m_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

系由下面的母函数所定义，

(7) $$[1-2(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})+\|\mathfrak{a}\|^2]^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}$$
$$=\sum a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n} V^s_{m_1,\cdots,m_n}(x_1, \cdots, x_n).$$

在上面的和式以及所有类似的和式中，和都是按所有非負整数 $m_1, \cdots, m_n$ 來求的. 很明顯，$V_m^s(\mathfrak{x})$ 是 x_k 的 m_k 次多項式，根据 m_k 是偶数或奇数而为 x_k 的偶或奇多項式；而这一多項式的次数则为

(8) $$m=m_1+\cdots+m_n.$$

如 $n=1$，则比較 (7) 及 10-9(29) 可知

(9) $$V_m^s(x)=C_m^{\frac{1}{2}s}(x), \qquad n=1.$$

如 $n=2$，而 $s=0, 2$，这时的多項式 (6) 是漢米特 (1865, 1865 a) 所提出. 对于任意的 n，则是由达頓 (1868) 所提出. 在 Appell 及 Kampé de Fériet 的著作的第二部分中，对这些多項式及有关資料有詳細的介紹，并列有全面的書目. 另外一些参考資料列于章末，其中是 Angelescu, Appell, Brinkman 及 Zernike, Caccioppoli, Chen, Dinghas, Erdélyi, Koschmieder, Orloff 及 Schmeidler.

將母函数 (7) 应用多項式定理展开为 $a_1, \cdots, a_m$ 的冪級数后立即可得下面的顯表示式：

(10) $$V^s_{m_1,\cdots,m_n}(x_1, \cdots, x_n)=\left(\frac{n+s-1}{2}\right)_m \frac{2^m x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}}{m_1!\cdots m_n!}$$
$$\times F_B\left(-\frac{m_1}{2}, \cdots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \cdots, \frac{1-m_n}{2}, -m-\frac{n+s-3}{2}; \frac{1}{x_1^2}, \cdots, \frac{1}{x_n^2}\right).$$

其中

(11) $$F_B(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n, \gamma; z_1, \cdots, z_n)$$
$$= \sum \frac{(\alpha_1)_{m_1}\cdots(\alpha_n)_{m_n}(\beta_1)_{m_1}\cdots(\beta_n)_{m_n}}{m_1!\cdots m_n!(\gamma)_{m_1+\cdots+m_n}} z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}$$

是劳列西拉 n 变量超比級数之一 (Appell 及 Kampé de Fériet, 1926, 第 7 章). 除此之外, V_m^s 还有以 x_k 升冪 (不是降冪) 的超比級数表示的公式, 这些表示式將根据 m_k 的宇称而有不同 [見 10-9(21) 及 10-9(22)].

如在 (7) 式中令 $a_k = tb_k$, 并比較式子二边 t^m 的系数, 就可得下面的关系式:

(12) $$\|\mathfrak{b}\|^m C_m^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}\left[\frac{(\mathfrak{b}, \mathfrak{x})}{\|\mathfrak{b}\|}\right]$$
$$= \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} b_1^{m_1}\cdots b_n^{m_n} V_{m_1,\cdots,m_n}^s(x_1, \cdots, x_n).$$

从題表示式可以証明 (10) 式所定义的多項式滿足下面 (超比的) 偏微分方程組

(13) $$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left[(m+n+s-1)V + \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right]\right\}$$
$$+(m_j+1)\left[(m+n+s-1)V + \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right] = 0,$$
$$j = 1, \cdots, n.$$

其中 m 是 (8) 式所决定的次数. 將这 n 个方程相加, 可知所有 m 次的多項式滿足偏微分方程

(14) $$(m+n)(m+s-1)V$$
$$+\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left[(s-1)V + \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right]\right\} = 0.$$

所論多項式还有一个値得注意的符号表示式, 如下:

(15) $$V_m^s(\mathfrak{x}) = \frac{2^m(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2})_m}{m_1!\cdots m_n!}$$
$$\times {}_0F_1(-n/2 - s/2 + 3/2 + m; \Delta^2/4)(x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}),$$

其中 ${}_0F_1$ 为一廣义超比級数［見 4-1(1)］，且

$$(16)\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

是拉普拉斯算符．这一表示式可用多項式 V^s_m 和超球面調和函数之間的关系（見 11-8 節）來導出．应用同样的关系，还可以証明積分

$$(17)\quad \int_S (1-r^2)^{\frac12 s-\frac12} V^s_{m'}(\mathfrak{x})\, V^s_m(\mathfrak{x})\, dx$$

在 $m\neq m'$ 以及在 $m=m'$ 而差分 m_i-m_i' 中有几个为奇数时等于零．由于这一積分在 $m=m'$ 而所有的差分 m_i-m_i' 都是偶数时不等于零，故知 V^s_m 并不能組成一正交多項式系．

对应于罗特列恰公式［10-9(11) 式］的公式为

$$(18)\quad m_1!\cdots m_n!\,(1-r^2)^{\frac12(m+n+s-1)}\, V^s_{m_1,\cdots,m_n}(x_1,\cdots,x_n) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial y_1^{m_1}\cdots\partial y_n^{m_n}}(1-r^2)^{\frac12(n+s-1)},$$

式中右边的

$$(19)\quad y_i=x_i(1-r^2)^{-\frac12}\qquad i=1,\cdots,n$$

是自变量，且

$$(20)\quad 1-r^2=(1+\|\mathfrak{y}\|^2)^{-1}.$$

这一公式可从母函数 (7) 中应用代换(19)，并以 $a_i(1-r^2)^{\frac12}$ 代 a_i 而得出．

母函数也可作为下面的積分表示式的來源

$$(21)\quad \pi^{\frac12 n} m_1!\cdots m_n!\,\Gamma(\tfrac12 s)\,V^s_m(\mathfrak{z}) = i^m (n+s-1)_m\,\Gamma(\tfrac12 n+\tfrac12 s) \times\int_S x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}(1-r^2)^{\frac12 s-1}[\|\mathfrak{z}\|+i(\mathfrak{x},\mathfrak{z})]^{-m-n-s+1}\,dx.$$

其他積分式参看 Dinghas(1950).

遞推关系、微分公式及类似的关系式都可从母函数中推導出來，見 Appell 及 Kampé de Fériet (1926 LXXVI 節).

12-6. 多項式 U

第二系多項式

(1) $U_m^s(\mathfrak{x})=U_{m_1,\cdots,m_n}^s(x_1,\cdots,x_n)$,

可由下面的母函数來定义:

(2) $$\{[(\mathfrak{a},\mathfrak{x})-1]^2+\|\mathfrak{a}\|^2(1-\|\mathfrak{x}\|^2)\}^{-\frac{1}{2}s}$$
$$=\sum a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}U_{m_1,\cdots,m_n}^s(x_1,\cdots,x_n).$$

如 $n=1$, 則

(3) $$U_m^s(x)=C_m^{\frac{1}{2}s}(x), \qquad n=1.$$

如 $n=2$, $s=1, 2$, 这时,这些多項式就是漢米特多項式; n 为任意数时的情形,見 12-5 節所列的文献.

这些多項式的最重要性質,就是它与 V_n^s 的双正交性質. 積分

(4) $$\int_S(1-r^2)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}V_m^s(\mathfrak{x})U_l^s(\mathfrak{x})\,dx$$

除了在 $m_1=l_1,\cdots,m_n=l_n$ 时以外,都等于零;且

(5) $$\int_S(1-r^2)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}V_m^s(\mathfrak{x})U_m^s(\mathfrak{x})dx=h_m^s$$
$$=\frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{2m+n+s-1}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2})}\,\frac{(s)_m}{m_1!\cdots m_n!}.$$

这一双正交性質可从母函数中得到証明(見 12-9 節中漢米特多項式对应性質的証明). 反之, Kampé de Fériet (1915) 先設定了双正交性質,而后从它可導出母函数.

多項式 U 的理論与多項式 V 的理論相仿,因此不贅,下面我們簡單列出一些有关的公式.

顯表示式:

(6) $$U_{m_1,\cdots,m_n}^s(x_1,\cdots,x_n)=\frac{(s)_m\,x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}}{m_1!\cdots m_n!}$$
$$\times F_B\Big(-\frac{m_1}{2},\cdots-\frac{m_n}{2},1-\frac{m_1}{2},\cdots,1-\frac{m_n}{2},\frac{s+1}{2};$$
$$-\frac{1-r^2}{x_1^2},\cdots-\frac{1-r^2}{x_n^2}\Big),$$

以及对应的 $x_1, \cdots, x_n$ 的升幂級数.

$$(7)\qquad [(\mathfrak{b}, \mathfrak{x})^2+\|\mathfrak{b}\|^2(1-r^2)]^{\frac{1}{2}m} C_m^{\frac{1}{2}s}\left(\frac{(\mathfrak{b}, \mathfrak{x})}{[(\mathfrak{b}, \mathfrak{x})^2+\|\mathfrak{x}\|^2(1-r^2)]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$=\sum_{m_1+\cdots+m_n=m} b_1^{m_1}\cdots b_n^{m_n} U^s_{m_1, \cdots, m_n}(x_1, \cdots, x_n).$$

多項式 U^s_m 滿足下面的偏微分方程系

$$(8)\qquad (1-r^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial U}{\partial x_j}+x_j\left(mU-\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)\right]$$

$$+m_j(1-r^2)\left(mU-\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)$$

$$-(s-1)\left[x_j\frac{\partial U}{\partial x_j}+x_j^2\left(mU-\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)-m_jU\right]=0,$$

$$j=1, \cdots, n.$$

所有的 m 次多項式都滿足偏微分方程

$$(9)\qquad (m+n)(n+s-1)U+\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_j}\right.$$

$$\left.-x_j\left[(s-1)U+\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial U}{\partial x_k}\right]\right\}=0,$$

这一式是將 n 个方程 (8) 相加而成，与 V^s_n 的对应方程 12-5(14) 完全一样.

符号表示式可寫成如下形式

$$(10)\qquad U^s_m(\mathfrak{x})=\frac{(s)_m}{m_1!\cdots m_n!}$$

$$\times{}_0F_1[\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{4}(1-r^2)\Delta^2](x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}),$$

其中 $(1-r^2)\Delta^2$ 的第 k 次方应取为 $(1-r^2)^k\Delta^{2k}$. 还有一个对应于 12-5(17) 式的公式，但不重要.

这里，罗特列恰公式的类似式將較 V^s_m 中的对应式为簡單.

$$(11)\qquad 2^m\left(\frac{s+1}{2}\right)_m m_1!\cdots m_n!(1-r^2)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}U^s_{m_1, \cdots, m_n}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$=(-1)^m(s)_m\frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}(1-r^2)^{m+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}.$$

科許米特 (1925) 求得了 U_m^s 的表达式，以关于 x_i^2 的偏導数表示。

对应于 12-5(21) 式的積分表示式为

$$(12)\quad \pi^{\frac{1}{2}n} m_1!\cdots m_n!\,\Gamma(\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{2})\,U_m^s(\mathfrak{z})$$
$$=(s)_m\Gamma(\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2})\int_S(1-r^2)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}$$
$$\times[z_1+ix_1(1-\|\mathfrak{z}\|^2)^{\frac{1}{2}}]^{m_1}\cdots[z_n+ix_n(1-\|\mathfrak{z}\|^2)^{\frac{1}{2}}]^{m_n}\,dx.$$

二多項式系 U_m^s 及 V_m^s 的关系可表达为下面二种等价的形式：

$$(13)\quad (2-2m-n-s)_m(r^2-1)^{\frac{1}{2}m}V_m^s\left[\frac{\mathfrak{x}}{(r^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$$
$$=2^m\left(\frac{n+s-1}{2}\right)_m U_m^{2-2m-n-s}(\mathfrak{x})$$

$$(14)\quad 2^m\left(-m-\frac{s-1}{2}\right)_m(r^2-1)^{\frac{1}{2}m}U_m^s\left[\frac{\mathfrak{x}}{(r^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$$
$$=(s)_m V_m^{2-2m-n-s}(\mathfrak{x}).$$

双正交性質已說明于 (4) 及 (5) 式. 另一个与双正交性質密切相关的关系式可根据下面的情形來求出：

$$R_m^s(\mathfrak{x})=(1-r^2)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}U_m^s(\mathfrak{x})$$

所滿足的偏微分方程系从 (8) 式可導出为

$$(15)\quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial R}{\partial x_j}+x_j\left[(m+s-1)R-\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right]\right\}$$
$$+m_j\left[(m+s-1)R-\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right]=0,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

很容易看出上式是 $V_m^s(\mathfrak{x})$ 所滿足的偏微分方程系 12-5(13) 的伴随系.

12-7. 展开問題及其他研究

U 和 V 的双正交性質提供了將一"任意"函数 $f(\mathfrak{x})$ 展开为下列二級数之一的方法：

(1)　$\sum a^s_m U^s_m(\mathfrak{x})$,

(2)　$\sum b^s_m V^s_m(\mathfrak{x})$.

从 12-6(4) 及 (5) 二式，有人得出了下面的公式

$$(3)\qquad h^s_m a^s_m = \int_S (1-r^2)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} f(\mathfrak{x})\, V^s_m(\mathfrak{x})\, dx,$$

$$(4)\qquad h^s_m b^s_m = \int_S (1-r^2)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} f(\mathfrak{x})\, U^s_m(\mathfrak{x})\, dx.$$

这种展开式的一般討論，可在 Appell 及 Kampé de Fériet 書中找到 (1926, 第二部, 5 章). 以后有些作者得出了更精确的結果.

在展开問題的研究中，通常总假設 s 在 (1) 及 (2) 中为正整数，如 $s\geqslant 2$, 科許米特称这时的 (1) 及 (2) 为阿貝尔級数，如 $s=1$, 則为达頓級数，并証明 n 个变量的阿貝尔級数可化为 $n+s-1$ 个变量的达頓級数. 此外，常須將多重級数 (1) 及 (2) 重行排列为簡單級数，这可把所有同次的項合併而成. 因此，(1) 式可解釋为

$$(5)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{m_1+\cdots+m_n=m} a^s_{m_1,\cdots,m_n} U^s_{m_1,\cdots,m_n}(x_1,\cdots,x_n)\right],$$

(2) 式的解釋也相同. 这些重行排列后的級数就可与 $n+s+1$ 維空間的單位超球面上的函数的拉普拉斯展开式相关，这一关系式有时常要用到.

像上面所說那样重行排列过的級数 (1) 及 (2) 的收斂性曾由 Caccioppoli (1932) 及 Koschmieder (1933) 就 $n=2$, $s=1$ 的情形研究过. Caccioppoli 曾求出了級数的和并用証明連續可微函数收斂性的奇異積分討論了它的收斂性，科許米特应用積分方程理論并証明了二次連續可微函数的絕对收斂性.

一般的 n 及(正整数) s 的情形，曾由 Koschmieder (1934) 研究过. 他用 (5) 式解釋 (1)，并用对应的公式解釋 (2)，証明这些級数和某些展开为盖根堡多項式的級数同等收斂. Koschmieder (1934 a) 还得出了拉普拉斯展开式的一个同等收斂性定理，以富

里哀級数作为比較級数.

拉普拉斯級数的 Cesaro 可和性曾由 Chen (1928) 及 Koschmieder (1929) 分别討論过. Koschmieder (1931) 并將这結果应用于阿貝尔級数.

在 S 上可積的函数 $f(\mathfrak{x})$ 的阿貝尔級数是可求和 (C, δ) 的, 在 S 上的每一处几乎都收斂于 $f(\mathfrak{x})$, 如

$$(6)\qquad \delta \geqslant n+s-1,$$

則一定屬于 S 上 f 的 Lebesgue 集. 此外, 在 S 上使

$$\|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}\|^{-\frac{1}{2}(n+s-1)}|f(\mathfrak{x})|$$

成为 $\mathfrak{x}$ 的一个可積函数的所有点 $\mathfrak{y}$ 上, 如

$$(7)\qquad \tfrac{1}{2}(n+s-1)<\delta<n+s-1,$$

則阿貝尔級数也是可求和 (C, δ) 的.

下面的展开式的例子取自 Appell 及 Kampé de Fériet (1926, 節 LXXXVIII 及 XCI).

$$(8)\qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{x})^k=\sum \frac{(-1)^m(-k)_m(\frac{1}{2})_{\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m}}{(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}s+\frac{1}{2})_{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m}} \times a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}\|\mathfrak{a}\|^{k-m} V_m^s(\mathfrak{x}),$$

式中 k 为一正整数, 和是按所有 $m_1, \cdots, m_n$ 的值來求的, 但 $k-m$ 应为一正的偶整数.

$$(9)\qquad \exp[i(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})]=2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}) \times \sum i^m\left(m+\frac{n+s-1}{2}\right) a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}\|\mathfrak{a}\|^{-m-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}} \times J_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}(\|\mathfrak{a}\|)\, V_m^s(\mathfrak{x}),$$

$$(10)\qquad \Gamma(s+\tfrac{1}{2})\exp(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})\, J_{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}[\|\mathfrak{a}\|(1-r^2)] =[\tfrac{1}{2}\|\mathfrak{a}\|(1-r^2)]^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}\sum \frac{1}{(s)_m} a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n} U_m^s(\mathfrak{x}).$$

在 (9), (10) 二式中, 和都是按所有非負的 $m_1, \cdots, m_n$ 來求的.

$n=2$ 的情形曾有詳細的研究[見 Appell 及 Kampé de Fériet (1926, 第二部, 第 7 章) 及本章的 12-5、12-7 節]. 球面域上另外

一种正交多項式曾由 Brinkman 及 Zernike (1935) 和 Gröbner (1948) 提出过．在球面域上，与偏微分方程 $\Delta^q F=0$ 有关的多項式曾由 Giulotto (1939) 研究过，在这种情形下，他得出了一双正交系．Devisme (1932) 引進了由下列母函数所定义的多項式，即

$$(11)\quad (1-3ax+3a^2y-a^3)^{-\nu},\ [1-3ax+3(a^2-b)y-a^3]^{-\nu},$$

它出現在偏微分方程

$$(12)\quad \Delta_3 u=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}-3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0$$

的研究中．

多項式 U_m^s, V_m^s 的一种推廣可用不变的二次型 $\phi(\mathfrak{x})$，它的倒逆型 $\psi(\mathfrak{x})$，及双綫性型 $\phi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ [見 12-8 (6) 至 (8)] 來定义．母函数为

$$(13)\quad \{[\phi(\mathfrak{a},\mathfrak{x})-1]^2+\phi(\mathfrak{a})[1-\phi(\mathfrak{x})]\}^{-\frac{1}{2}s}=\sum a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}\mathfrak{U}_m^s(\mathfrak{x}),$$

$$(14)\quad [1-2(\mathfrak{a},\mathfrak{x})+\psi(\mathfrak{a})]^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}=\sum a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}\mathfrak{V}_m^s(\mathfrak{x}).$$

这些多項式系由漢米特所引出，并由 Angelescu (1916) 加以研究．如 $\phi(\mathfrak{x})=(\mathfrak{x},\mathfrak{x})=\psi(\mathfrak{x})$，則 (13) 及 (14) 式所定义的多項式就分别是 U_m^s 及 V_m^s.

多变数漢米特多項式

12-8．漢米特多項式的定义

像上几節中一样，我們以

$$(1)\quad \mathfrak{x}=(x_1,\cdots,x_n)$$

表示一(实)矢量，以

$$(2)\quad \|\mathfrak{x}\|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

表示 $\mathfrak{x}$ 的長，以

$$(3)\quad (\mathfrak{a},\mathfrak{x})=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

表示二个这样的矢量的标積．以 C 表示一固定的正有限对称实元

素正方矩陣，即

$$(4)\qquad C=[c_{ij}], \qquad i, j=1, \cdots, n,$$

$$c_{ij}=c_{ji}\ 实,\quad \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j>0, \qquad \mathfrak{x}\neq 0,$$

將逆矩陣記为 C^{-1}；它的元素为 γ_{ij}/Δ，其中

$$(5)\qquad \Delta=\det c_{ij}, \qquad i, j=1, \cdots, n,$$

为 C 的行列式，γ_{ij} 为 Δ 中 c_{ji} 的余因子．与 C 連帶的有正有限二次型

$$(6)\qquad \phi(\mathfrak{x})=(C\mathfrak{x}, \mathfrak{x})=(\mathfrak{x}, C\mathfrak{x})=\sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j,$$

及对称双綫性型

$$(7)\qquad \phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=(C\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=(\mathfrak{x}, C\mathfrak{y})=\sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j,$$

尙有倒逆型

$$(8)\qquad \psi(\mathfrak{x})=\phi(C^{-1}\mathfrak{x})=(C^{-1}\mathfrak{x}, \mathfrak{x})=(\mathfrak{x}, C^{-1}\mathfrak{x}).$$

它也是正有限的二次型，还有倒逆对称双綫性型

$$(9)\qquad \psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=(C^{-1}\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=(\mathfrak{x}, C^{-1}\mathfrak{y}).$$

这些形式之間有着一系列的关系，如下：

$$(10)\qquad \phi(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})=\phi(\mathfrak{x})+2\phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})+\phi(\mathfrak{y}),$$

$$\psi(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})=\psi(\mathfrak{x})+2\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})+\psi(\mathfrak{x}),$$

$$\phi(\mathfrak{x})=\psi(C\mathfrak{x}),\ \psi(\mathfrak{x})=\phi(C^{-1}\mathfrak{x}),$$

$$(11)\qquad \phi(\mathfrak{x}+C^{-1}\mathfrak{y})=\phi(\mathfrak{x})+2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})+\psi(\mathfrak{y}),$$

$$(12)\qquad \psi(\mathfrak{x}+C\mathfrak{y})=\psi(\mathfrak{x})+2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})+\phi(\mathfrak{y}).$$

最后，我們提出下面一个積分公式

$$(13)\qquad \int \exp\left[-\tfrac{1}{2}\phi(\mathfrak{x})+(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})\right]dx=(2\pi)^{\frac{1}{2}n}\Delta^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{a})\right],$$

其中積分是按整个空間進行的，dx 代表 $dx_1\cdots dx_n$，$\mathfrak{a}$ 为一常矢量．应用公式 (11) 而后將二次型 $\phi(\mathfrak{x}+C^{-1}\mathfrak{a})$ 变換为二次方的和即可得上式的証明．

上面所用的記法，將在本節及以后几節中普遍应用.

多变量的漢米特多項式是双正交多項式系，与之相連的权函数为

(14) $w(\mathfrak{x})=\Delta^{1/2}(2\pi)^{-1/2 n}\exp[-1/2\,\phi(\mathfrak{x})]$,

域就是整个 n 維空間. 关系式

(15) $\int w(\mathfrak{x})\,dx=1$

是 (13) 式的一个推論. 很明顯，这些多項式实际就是 10-13(1) 所定义的正交多項式的 n 維推廣. 它們是漢米特 (1864) 所介紹，而后由很多学者研究过. Appell 及 Kampé de Fériet(1926, 第 3 部) 的著作中有关于这一方面理論和書目的詳細介紹. 在本章末还另外列出了一些参考資料，作者是 Caccioppoli, Erdélyi, Feldheim, Grad, Koschmieder, Mazza, Picone, Thijssen, 及 Tortrat. Cameron-Martin (1947) 及 Friedrichs (1951. 特别是 p. 212 ff) 把它推廣至無窮維的空間.

二系多項式

(16) $G_m(\mathfrak{x})=G_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\cdots,x_n)$

$H_m(\mathfrak{x})=H_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\cdots,x_n)$

可由下面的母函数定义

(17) $\exp[(C\mathfrak{a},\mathfrak{x})-1/2\,\phi(\mathfrak{a})]=\exp[1/2\,\phi(\mathfrak{x})-1/2\,\phi(\mathfrak{x}-\mathfrak{a})]$

$$=\sum\frac{a_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{a_n^{m_n}}{m_n!}H_m(\mathfrak{x}),$$

(18) $\exp[(\mathfrak{a},\mathfrak{x})-1/2\,\psi(\mathfrak{a})]=\exp[1/2\,\phi(\mathfrak{x})-1/2\,\phi(\mathfrak{x}-C^{-1}\mathfrak{a})]$

$$=\sum\frac{a_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{a_n^{m_n}}{m_n!}G_m(\mathfrak{x}),$$

这就是 10-13(19) 式的母函数在若干維空間的推廣. 在所有和式中，除特有規定外，$m_1,\cdots,m_n$ 都是非負整数. (17) 及 (18) 式所定义的多項式是 x_i 的 m_i 次多項式，它們总的次数是

(19) $m=m_1+\cdots+m_n$.

上面这些定义是根据 Appell 及 Kampé de Fériet (1926, CXVIII 節) 的. 当 $n=1$ 时, 如取 $c_{11}=2$, 則得 10-13 節中所定义的漢米特多項式.

母函数 (17) 及 (18) 式中 $a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}$ 的系数如用台劳定理來計算,有人得出了对应于 10-13(7) 的公式:

(20) $$H_m(\mathfrak{x})=(-1)^m\exp\left[\tfrac{1}{2}\phi(\mathfrak{x})\right]\frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\phi(\mathfrak{x})\right],$$

(21) $$G_m(C^{-1}\mathfrak{x})=(-1)^m\exp\left[\tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{x})\right]\times\frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{x})\right],$$

Koschmieder(1925) 曾給出了某些二变量漢米特多項式以偏導数表示的另外一个表达式. (17) 和 (18) 式或 (20) 和 (21) 式都可以作为多变量漢米特多項式的定义.

在特殊二次型 $\phi(\mathfrak{x})$ 的情形下, H. Grad (1949) 曾提出了另外一种記法.

12-9. 漢米特多項式的基礎性質

漢米特多項式的最重要性質是双正交性質

(1) $$\int w(\mathfrak{x})G_l(\mathfrak{x})H_m(\mathfrak{x})\,dx=\delta_{l_1m_1}\cdots\delta_{l_nm_n}m_1!\cdots m_n!,$$

式中 $w(\mathfrak{x})$ 为权函数,由 12-8(14) 式定义, δ_{pq} 的定义見 12-2 節, 且

$$l=l_1+\cdots+l_n.$$

要証明上面的双正交性質, 注意: 根据 12-8(14), (17), (18) 可知 (1) 式的左边是

(2) $$\frac{a_1^{l_1}}{l_1!}\cdots\frac{a_n^{l_n}}{l_n!}\,\frac{b_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{b_n^{m_n}}{m_n!}$$

的系数, (2) 式出現于

(3) $$(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}\Delta^{-\frac{1}{2}}\int\exp\left[-\tfrac{1}{2}\phi(\mathfrak{x})+(\mathfrak{a},\mathfrak{x})-\tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{a})+(C\mathfrak{b},\mathfrak{x})-\tfrac{1}{2}\phi(\mathfrak{b})\right]dx$$

之中．根据 12–8(13) 式可知 (3) 式就等于

(4) $\quad \exp\left[\tfrac12\psi(\mathfrak{a}+C\mathfrak{b})-\tfrac12\psi(\mathfrak{a})-\tfrac12\phi(\mathfrak{b})\right],$

而根据 12–8(12)，它应为

(5) $$\exp\left[(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\right]=\sum\frac{(a_1b_1)^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{(a_nb_n)^{m_n}}{m_n!},$$

級数 (5) 中的 (2) 的系数就是 (1) 式的右边部分．

对应于米勒公式 10–13(22) 的一个双綫性母函数可用同样方法來得出，对于充分小的正的 $t_1,\cdots,t_n$，計算積分

(6) $$(\pi^n t_1\cdots t_n)^{-1}\iint\exp\Big[-\sum_{j=1}^{n}(u_j^2+v_j^2)/t_j+\tfrac12\phi(\mathfrak{x})$$
$$-\tfrac12\phi(\mathfrak{x}-\mathfrak{u}-i\mathfrak{v})+\tfrac12\phi(\mathfrak{y})-\tfrac12\phi(\mathfrak{y}-\mathfrak{u}+i\mathfrak{v})\Big]\,du\,dv,$$

这里的計算有二种不同的方法，其一是用 12–8(13)，另一法是先用 12–8(17) 及 (18) 而后直接積分．令

(7) $$\phi_1(\mathfrak{x})=\sum_{j=1}^{n}x_j^2/t_j+\phi(\mathfrak{x}),$$
$$\phi_2(\mathfrak{x})=\sum_{j=1}^{n}x_j^2/t_j-\phi(\mathfrak{x}),$$

注意，对于足夠小的正的 $t_1,\cdots,t_n$，二次型 $\phi_k(\mathfrak{x})$，$k=1, 2$ 是正有限的，以 Δ_k 表示 ϕ_k 的行列式，以 $\psi_k(\mathfrak{x})$ 表示倒逆二次型，則得

(8) $$\sum\frac{t_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{t_n^{m_n}}{m_n!}H_m(\mathfrak{x})H_m(\mathfrak{y})$$
$$=(t_1\cdots t_n)^{-1}(\Delta_1\Delta_2)^{-1/2}\exp\left[\tfrac14\psi_1(C\mathfrak{x}+C\mathfrak{y})\right.$$
$$\left.-\tfrac14\psi_2(C\mathfrak{x}-C\mathfrak{y})\right].$$

这种形式中的結果以及 $H_m(\mathfrak{x})G_m(\mathfrak{y})$ 的母函数的对应結果是 Erdélyi (1938 a) 得出的，Koschmieder (1938, 1938 a) 加以推廣，得出了 $n=2$ 时的顯表示式．双綫性母函数还曾由 Tortrat (1948, 1948 a) 討論过．

$H_m(\mathfrak{x})$ 所滿足的偏微分方程系也可从母函数中推出．12–8 (17) 式左边的函数滿足下述偏微分方程組

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_j} - \Delta a_i \frac{\partial F}{\partial a_i} = 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 Δ 为 c_{ij} 的行列式，γ_{ij} 是 Δ 中 c_{ji} 的余因子. 展开为 a_i 的冪級数，可得下面的 $H_m(\mathfrak{x})$ 滿足的偏微分方程系:

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k \frac{\partial H}{\partial x_j}\right] - m_i \Delta H = 0,$$
$$i = 1, \cdots, n.$$

將 (9) 中的 n 个方程相加，卽可得同一次 m 的所有多項式滿足的偏微分方程

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial H}{\partial x_k} - m\Delta H = 0.$$

$G_m(\mathfrak{x})$ 所滿足的偏微分方程系为

$$(11) \qquad \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} + m_i \Delta G = 0, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial G}{\partial x_k} + m\Delta G = 0,$$

它們的証明和上面的同.

遞推关系和微分公式也可从母函数導出. $n=2$ 的情形，在 Appell 及 Kampé de Fériet (1926, CXXII 節)的著作中可找到.

在單变量的漢米特多項式和多变量的漢米特多項式之間有着很多关系式. 在 12-8(17) 及 (18) 式中，以 $t\mathfrak{a}$ 代 $\mathfrak{a}$，并应用 10-13 (19)式展开为 t 的冪級数，得

$$(13) \qquad \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1,\cdots m_n}(x_1, \cdots, x_n)$$
$$= \frac{[\frac{1}{2}\phi(\mathfrak{a})]^{\frac{1}{2}m}}{m!} H_m\left(\frac{\phi(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})}{[2\phi(\mathfrak{a})]^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$$(14) \qquad \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} G_{m_1,\cdots,m_n}(x_1, \cdots, x_n)$$
$$= \frac{[\frac{1}{2}\psi(\mathfrak{a})]^{\frac{1}{2}m}}{m!} H_m\left(\frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})}{[2\psi(\mathfrak{a})]^{\frac{1}{2}}}\right).$$

其他的單变量与多变量漢米特多項式之間的关系，見 Appell 及 Kampé de Fériet 以及 Feldheim 的著作，列于本章末的参考文献中. Feldheim 所用的記法与我們这里所用的不同.

二变量漢米特多項式的一个加法定理，曾由 Koschmieder (1930 a) 求得.

12-10. 其他研究

比較一下母函数就可看出多变量漢米特多項式实际就是 12-7(13) 及 (14) 式所定义的多項式的極限情形:

$$(1)\qquad \lim_{s\to\infty} s^{-\frac{1}{2}m}\, \mathfrak{U}_m^s\left(\frac{\mathfrak{x}}{s^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\, H_m(\mathfrak{x}),$$

$$(2)\qquad \lim_{s\to\infty} s^{-\frac{1}{2}m}\, \mathfrak{V}_m^s\left(\frac{\mathfrak{x}}{s^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\, G_m(\mathfrak{x}).$$

在漢米特多項式的進一步研究中，可应用下面的多維高斯变換:

$$(3)\qquad \mathfrak{G}_{\mathfrak{x}}^{u}[F(\mathfrak{y})] = \Delta^{\frac{1}{2}}(2\pi u)^{-\frac{1}{2}n}\int F(\mathfrak{y})\exp\left[-\frac{1}{2u}\phi(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\right]dy,$$

[見方程 10-13(30), (31)]. 公式

$$(4)\qquad \mathfrak{G}_{\mathfrak{x}}^{u}[H_m(\lambda\mathfrak{y})] = (1-\lambda^2 u)^{\frac{1}{2}m}\, H_m\left[\frac{\lambda\mathfrak{x}}{(1-\lambda^2 u)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

$$(5)\qquad \mathfrak{G}_{\mathfrak{x}}^{1}[H_m(\mathfrak{y})] = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\right),$$

$$(6)\qquad \mathfrak{G}_{\mathfrak{x}}^{1}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_j\right)\right] = i^{-m}H_m(i\mathfrak{x}),$$

第一个公式可从母函数 12-8(17) 中得到証明，是漢米特多項式所满足的一个積分方程；第二个公式是第一式的極限情形；第三式也是第一式的一个極限情形 $(\lambda\to\infty)$，是漢米特多項式的積分表示式. G_m 的对应公式为

$$(7)\qquad \mathfrak{G}_{\mathfrak{x}}^{u}[G_m(\lambda\mathfrak{y})] = (1-\lambda^2 u)^{\frac{1}{2}m}\, G_m\left[\frac{\lambda\mathfrak{x}}{(1-\lambda^2 u)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

$$(8)\qquad \mathfrak{G}^{1}_{\mathfrak{x}}[G_m(\mathfrak{y})] = \prod_{j=1}^{n} x_j,$$

$$(9)\qquad \mathfrak{G}^{1}_{\mathfrak{x}}\left[\prod_{j=1}^{n} y_j\right] = i^{-m}\, G_m(i\mathfrak{x}).$$

Feldheim (1942) 应用了下面更普遍的定义

$$(10)\qquad \mathfrak{G}^{u}_{\mathfrak{x}}[F(\mathfrak{y})] = \frac{\Delta^{1/2}(2\pi)^{-1/2\, n}}{(u_1 \cdots u_n)^{1/2}}$$

$$\times \int F(\mathfrak{y}) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\,\frac{x_i - y_i}{u_i^{1/2}}\,\frac{x_j - y_j}{u_j^{1/2}}\right) dy,$$

并在 (10) 式所定义的函数变换下研究了漢米特多项式的性态.

双正交性質 12-9(1) 表明一个“任意”函数 $f(\mathfrak{x})$ 可展开为漢米特多項式級数,取如下二形式之一:

$$(11)\qquad \sum a_m\, G_m(\mathfrak{x}),$$

$$(12)\qquad \sum b_m\, H_m(\mathfrak{x}),$$

其中

$$(13)\qquad m_1!\cdots m_n!\, a_m = \int w(\mathfrak{x})\, f(\mathfrak{x})\, H_m(\mathfrak{x})\, dx,$$

$$(14)\qquad m_1!\cdots m_n!\, b_m = \int w(\mathfrak{x})\, f(\mathfrak{x})\, G_m(\mathfrak{x})\, dx.$$

这些展开式的收斂問題曾由 Thijssen (1926, 1927) 就 $n=2$、函数 $f(\mathfrak{x})$ 在一有界域之外恆等于零,在有界域之内滿足一定的連續条件的情形作了討論. 均方逼近問題(見 10-2 節)曾由 Cacciop-poli (1932 a) 就函数类 L^2_w, 也就是說使積分

$$\int |f(\mathfrak{x})|^2 \exp[-1/2\, \phi(\mathfrak{x})]\, dx$$

收斂的函数类作了討論. 逼近于無界域中任意函数的問題还曾由 Picone (1935) 研究过.

Mazza (1940) 也曾討論过漢米特多項式, 并構作了一个正交系. Devisme (1932) 定义了几系多項式, 它在某种性質上类似于漢米特多項式. 它們的母函数为

(15) $\exp(ax-a^2y+a^3/2)$, $\exp[ax-(a^2-b)y+a^3/3]$.

由 (15) 式生成的多項式与某些包含微分算符 12-7(12) 的偏微分方程有关.

参 考 文 献

Angelescu, Aurel, 1915: *C. R. Acad. Sci. Paris* 161, 490-492.

Angelescu, Aurel, 1915-16: *Bull. Math. Soc. Roumaine Sci.* 4, 30-35.

Angelescu, Aurel, 1916: *Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des integrales multiples*, Thesis, Paris, 140 pp.

Appell, Paul, 1881: *Arch. Math. Physik* (1) 66, 238-245.

Appell, Paul, 1882: *J. Math. Pures Appl.* (3) 8, 173-216.

Appell, Paul, 1901: *Arch. Math. Physik* (3) 1, 69-71.

Appell, Paul, 1903: *Arch. Math. Physik* (3) 4, 20-21.

Appell, Paul and Joseph Kampé de Fériet, 1926: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Polynomes d'Hermite*, Gauthier-Villars, Paris.

Brinkman, H. C. and Frits Zernike, 1935: *Nederl. Akad. Wetensch, Proc.* 38, 161-170.

Caccioppoli, Renato, 1932: *Rend. Sem. Mat. Univ Padova* 3, 168-182.

Caccioppoli, Renato, 1932 a: *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 3, 364-375.

Cameron, R. H. and W. T. Martin, 1947: *Ann. of Math* 48, 385-389.

Chen, K. K., 1928: *Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ.* Ser. I, 17, 1073-1086.

Devisme, Jacques, 1932: *C. R. Acad. Sci. Paris* 195, 437-439, 936-938.

Didon, Francois, 1868: *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (1) 5, 229-310.

Dinghas, Alexander, 1950: *Math. Z.* 53, 76-83

Erdélyi, Arthur, 1938: *Math. Ann.* 11, 456-465.

Erdélyi, Arthur, 1938 a: *Math. Z.* 44, 301-311.

Feldheim, Ervin, 1940: *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa* (2) 9, 225-252.

Feldheim, Ervin, 1941: *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S)* 31, 534-537.

Feldheim, Ervin, 1942: *Pont. Acad. Sci. Comment.* 6, 1-25.

Friedrichs, K. O., 1951: *Comm. Pure Appl. Math.* 4, 161-224.

Giulotto, Virgilio, 1939: *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat.* 72, 37-57.

Grad, Harold, 1949: *Comm. Pure Appl. Math.* 2, 325-330.

Gröbner, Wolfgang, 1948: *Monatsh. Math.* 52, 38-54.

Hermite, Charles, 1864: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 58, 93-100, 266-273

Hermite, Charles, 1865: *J. Reine Angew. Math.* 64, 294-296.

Hermite, Charles, 1865 a: *C. R. Acad. Sci. Paris* 60, 370-377, 432, 440, 461-466, 512-518.

Jackson, Dunham, 1937: *Duke Math. J.* 2, 423-434.

Jackson, Dunham, 1938: *Duke Math. J.* 4, 441-454.

Jackson, Dunham, 1938 a: *Ann of Math.* (2) 39, 262-268.

Kampé de Fériet, Joseph, 1915: *Sur les fonctions hyperspheriques*, Thesis, Paris, 111 pp

Koschmieder, Lothar, 1924: *Math. Ann.* 91, 62-81.

Koschmieder, Lothar, 1925: *Jber. Deutsch. Math. Verein* 34, 57-64.

Koschmieder, Lothar, 1926: *Revista Mat. Hisp.-Amer.* (2) 1, 97-107.

Koschmieder, Lothar, 1929: *Math. Ann.* 101, 120-125.

Koschmieder, Lothar, 1930: *Revista Soc. Mat. Espanola* (2) 5, 1-14.

Koschmieder, Lothar, 1930 a: *Revista Soc. Mat. Espanola* (2) 5, 274-280.

Koschmieder, Lothar, 1931: *Math. Ann.* 104, 387-402.

Koschmieder, Lothar, 1933: *Monatsh. Math. Phys.* 40, 223-232.

Koschmieder, Lothar, 1934: *Math. Ann.* 110, 734-738.

Koschmieder, Lothar, 1934 a: *Monatsh. Math. Phys.* 41, 58-63.

Koschmieder, Lothar, 1938: *Math. Z.* 43, 248-254.

Koschmieder, Lothar, 1839 a: *Math. Z.* 43, 783-792.

Koschmieder, Lothar, 1940: *Anz. Akad. Wiss. Wien. Math.-Nat. Kl.* 41-43.

Mazza, S. C., 1940: *An. Soc. Ci. Argentina* 130, 137-148.

Orloff, G. A., 1881: *On some polynomials in one or several variables*, Thesis, St. Petorsburg, 124 pp.

Orlow, G. A., 1881 a: *Nouv. Ann.* (2) 40, 481-489.

Picone, Mauro, 1935: *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 5, 155-195.

Schmeidler, Werner, 1941: *J. Reine Angew. Math.* 183, 175-182.

Thijssen, W. P., 1926: *Verslagen Amsterdam* 35 (2) 1100-1111.

Thijssen, W. P., 1927: *Nederl. Akad. Wetensch, Proc.* 30 (1), 69-80.

Tortrat, Albert, 1948: *C. R. Acad. Sci. Paris* 226, 298-300.

Tortrat, Albert, 1948 a: *C. R. Acad. Sci. Paris* 226, 543-545, errata 758-759.

第十三章　橢圓函数与橢圓積分

13-1. 引言

橢圓積分是 J. 華里司在 1655-59 年所遇見. 現在都認为是欧拉所提出, 他在 1753 年求得了橢圓積分的加法定理. 勒上特关于橢圓積分的著作共有好几十卷, 他所引進的标准形式到現在还在应用. 雅可比在 1828 年引入橢圓函数, 它是(不定)橢圓積分的反演; 他还系統地研究了 θ 函数. 阿培耳独立地得出了几种雅可比所得出的結果, 并研究了我們今天称之为超橢圓積分和阿培耳積分的積分. 韋尔司特拉斯說明了橢圓函数論与复变数函数論之間的关系, 并創立了双周期函数的一般理論.

橢圓函数的歷史在 R. 弗立克的著作 "Encyklopädie" (1913) 中有所叙述. 这一篇文章中还列出了迄至 1913 年为止的文献目錄. 自 1913 年以后有关于橢圓函数的較重要著作列于本章之末, 至于早期的一些文献可参看弗立克的論文.

本章包括二部分, 第一部分討論橢圓積分, 第二部分研究橢圓函数. 在第二部分中, 雅可比函数和韋尔司特拉斯函数同时提出, 前者在数值工作方面有它的用处, 后者在基礎关系的对称和簡化方面有它的特色. 应当指出, Neville (1944) 为雅可比橢圓函数創立了一套系統的記法, 大大地簡化了公式, 但在本章中我們將只用傳統的記法, 唯一的原因就是这种記法还在普遍应用. 第二部分中还包括有 θ 函数, 也概略地介紹了橢圓模函数. 有关模函数的詳細研究見第 14 章.

第一部分　橢圓積分

13-2. 橢圓積分

最簡單(不定)的積分是一有理函数的積分, 一般最簡單型是

下列形式的積分

(1) $I=\int R(x, y)dx,$

这里 R 是它的二变量的有理函数，y 是 x 的代数函数，也就是說，可寫成如下的方程

(2) $P(x, y)=0,$

其中 P 是二变量的某一次(如 n)多項式．上面这种積分叫做阿培耳積分．

阿培耳積分的理論的主要內容之一就是積分(1)的性态依賴于 P 的本質，甚于依賴于 R 的本質，或者說積分(1)的性态差不多由 x, y 平面內方程(2)所表示的代数曲綫 C_n 的本質來确定．在阿培耳積分的理論中，n 次的代数曲綫將根据它的虧数

(3) $p=\binom{n-1}{2}-d$

來分类，所謂代数曲綫的虧数就是 n 次非退化曲綫的二重点的最大可能数 $\binom{n-1}{2}$ 与所論曲綫的实际二重点数 d 之間的差．虧数是一个双有理不变式．也就是說在曲綫作双有理变換

(4) $x=R_1(\xi, \eta), \quad y=R_2(\xi, \eta)$

时保持不变，这里 R_1 及 R_2 是二有理函数，对于这二有理函数來說，应該有另外二个有理函数 R_3, R_4 存在，使

(5) $\xi=R_3(x, y), \quad \eta=R_4(x, y).$

虧数为零的曲綫是有理曲綫(unicursal Curves)．現在已經証明，对于这些曲綫來說，x 及 y 可表示为一个参数的有理函数．因为有理函数是單值函数，故知这一参数是曲綫的單値化变量(uniformizing variable)．在(1)式中，如引入这一参数作为新的積分变量，則被積函数將为这一参数的有理函数，因此積分可用初等函数(参数的)來計値．参数本身是 x 的代数函数，由此可知虧数为零的阿培耳積分可用初等函数及代数函数來表示．

对于虧数为1的代数曲綫，Clebsch (1865)曾証明 x 及 y 可

表为二参数 ξ 及 η 的有理函数，这里 η^2 是 ξ 的三次或四次多項式. 在(1)式中引入 ξ 作为新的積分变量，可知每一个虧数为 1 的積分都可以轉化为一种形式，其中方程(2)將为

$$(6)\qquad y^2=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4,$$

式中或者是 $a_0\neq 0$, 或者是 $a_0=0$ 而 $a_1\neq 0$. 由(1),(6)式定义的積分称为橢圓積分，上面我們已經証明虧数为 1 的阿培耳積分都可用積分变量的有理变換轉化为橢圓積分. 在下面的 13–14 節中將可看到，方程(6)因而也是虧数为 1 的任一代数曲綫上的 x 及 y 都可表达为变量 z 的單値橢圓函数的有理型式，这里的 z 是所論曲綫的一个單値化变量.

$p\geqslant 2$ 的情形要复什得多，这时將出現超橢圓積分，方程(2)則取如下形式

$$(7)\qquad y^2=a_0x^n+na_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

但这里并不能說每一曲綫都可用双有理变換变换为(7)的形式. 因此，超橢圓積分并不適宜于虧数 $p\geqslant 2$ 的代数曲綫的單値化，这时应当应用自守函数，参看 14–9 節.

在这一章中，我們將只限于討論(1),(6)式所定义的橢圓積分，以及与这些積分相連帶的橢圓函数. (6)右边的多項式在 $a_0\neq 0$ 时將記为 $G_4(x)$, 在 $a_0=0$ 而 $a_1\neq 0$ 时將記为 $G_3(x)$. 如(6)式右边的多項式具有一二重零点，則積分 I 可用初等函数計値. 因此，我們將假設 G_4 (或者可能是 G_3)將不具有二重根.

13-3. 橢圓積分的簡化

在上一節中，我們已經說明，对于橢圓積分

$$(1)\qquad I=\int R(x,y)\,dx,\quad y^2=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4$$

來說，多項式 $a_0x^4+\cdots+a_4$ 較有理函数 R 更为重要. 这一点可用下述勒上特定理來加以証明，并由此可得一嚴格的意义. 勒上特定理如下:

橢圓積分 (1) 可表达为 x 的有理函数的積分及如下形式的積分的綫性組合(常系数):

(2) $$I_1=\int\frac{dx}{y},\quad I_2=\int\frac{\frac{1}{2}a_0x^2+a_1x}{y}\,dx,\quad I_3=\int\frac{dx}{(x-c)y},$$

其中 c 为一常参数,如 $c=\infty$, 則 I_3 应解釋为:

(3) $$I_3^*=\int\frac{x\,dx}{y}.$$

積分的簡化可分几步進行.

由于 y 的偶次方可以表为 x 的多項式,故可將 R 寫成如下形式:

(4) $$R(x,y)=\frac{M_1(x)+M_2(x)y}{N_1(x)+N_2(x)y}$$
$$=\frac{[M_1(x)+M_2(x)y][N_1(x)-N_2(x)y]y}{\{[N_1(x)]^2-[N_2(x)y]^2\}y},$$

其中 M_1, M_2, N_1, N_2 是 x 的多項式,上式可寫为

(5) $$R(x,y)=R_1(x)+\frac{R_2(x)}{y},$$

R_1 及 R_2 是 x 的二个有理函数. 这样就完成了簡化的第一步.

第二步是將 x 的有理函数 $R_2(x)$ 分解为 x 的一个多項式及部分分式之和. 即

(6) $$I=\int R(x,y)\,dx=\int R_1(x)\,dx+\sum_n a_n\int\frac{x^n}{y}\,dx$$
$$+\sum_{m,r}A_{m,r}\int\frac{dx}{(x-c_m)^ry},$$

因此只須考察下面的積分就夠了:

(7) $$J_n=\int\frac{x^n}{y}\,dx\qquad n=0,1,2,\cdots$$
$$H_r=\int\frac{dx}{(x-c)^ry}\qquad r=1,2,\cdots$$

第三步是以 J_n 及 H_r 間的某些遞推关系作为依据. 用 x 的

恆等式

(8) $$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4$$
$$=b_0(x-c)^4+4b_1(x-c)^3+6b_2(x-c)^2+4b_3(x-c)+b_4$$

來确定数 $b_0,\cdots,b_4$，于是得下述恆等关系

(9) $$\frac{d}{dx}(x^my)=mx^{m-1}y+x^my'=\frac{1}{y}\left[mx^{m-1}y^2+\frac{1}{2}x^m\frac{d(y^2)}{dx}\right]$$
$$=\frac{1}{y}\Big[mx^{m-1}(a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4)$$
$$+\frac{1}{2}x^m(4a_0x^3+12a_1x^2+12a_2x+4a_3)\Big]$$
$$=(m+2)a_0\frac{x^{m+3}}{y}+2(2m+3)a_1\frac{x^{m+2}}{y}+6(m+1)a_2\frac{x^{m+1}}{y}$$
$$+2(2m+1)a_3\frac{x^m}{y}+ma_4\frac{x^{m-1}}{y}.$$

(10) $$\frac{d}{dx}[(x-c)^my]=(m+2)b_0\frac{(x-c)^{m+3}}{y}$$
$$+2(2m+3)b_1\frac{(x-c)^{m+2}}{y}+6(m+1)b_2\frac{(x-c)^{m+1}}{y}$$
$$+2(2m+1)b_3\frac{(x-c)^m}{y}+mb_4\frac{(x-c)^{m+1}}{y}.$$

在(9)式中，令 $m=0,1,2,\cdots$，在(10)式中令 $m=-1,-2,-3,\cdots$，而后積分，則依次可得

(11) $$2a_0J_3+2\cdot3a_1J_2+6\cdot1a_2J_1+2\cdot1a_3J_0=y$$
$$3a_0J_4+2\cdot5a_1J_3+6\cdot2a_2J_2+2\cdot3a_3J_1+a_4J_0=xy$$
$$4a_0J_5+2\cdot7a_1J_4+6\cdot3a_2J_3+2\cdot5a_3J_2+2a_4J_1=x^2y$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(12) $$b_0\int\frac{(x-c)^2}{y}dx+2\cdot1\cdot b_1\int\frac{x-c}{y}dx$$
$$-2\cdot1\cdot b_3H_1-1\cdot b_4H_2=\frac{y}{x-c}$$

$$-2\cdot 1\cdot b_1 J_0 - 6\cdot 1\cdot b_3 H_1 - 2\cdot 3\cdot b_3 H_2 - 2\cdot b_4 H_3 = \frac{y}{(x-c)^2}$$

$$-b_0 J_0 - 2\cdot 3\cdot b_1 H_1 - 6\cdot 2\cdot b_2 H_2 - 2\cdot 5\cdot b_3 H_3 - 3\cdot b_4 H_4$$

$$= \frac{y}{(x-c)^3},$$

…………………………………………………………

令

(13) $\int \frac{x-c}{y} dx = J_1 - cJ_0,\ \int \frac{(x-c)^2}{y} dx = J_2 - 2cJ_1 + J_0,$

由此可知，应用方程 (11) 及 (12) 就可把所有的 J_n 及 H_r 用 J_0、J_1, J_2, H_1, 及 x 与 y 的某些有理函数來表示. 此外，比較一下 (7) 和 (2) 及 (3)，就可知

(14) $J_0 = I_1,\ J_1 = I_3^*,\ a_0 J_2 = 2I_2 - 2a_1 I_3^*,\ H_1 = I_3,$

这就証明了勒上特定理.

如 $a_0 = 0$, 因而也是 $b_0 = 0$, 則还可稍得簡化. 此时

(15) $I_2 = a_1 I_3^*$ $\qquad a_0 = 0$

因此所有的積分都簡化为 I_1, I_3, I_3^* 的綫性組合. 再从 (11) 及 (12) 可知，此时所有的 J_n 及 H_r 可用 J_0, J_1, H_1 及 x, y 的有理函数來表示.

積分 I_1, I_2, I_3 可分别称之为**第一类，第二类及第三类橢圓積分**.

(1) 式中的積分变量的綫性分式变換可以改变多項式 y^2, 因此，这一类的適当变換可用以將多項式化为标准形式(見 13–5 節). 这种标准形式中常用的有二种，在本節中，我們將討論这二标准形式的一些較重要的結果，并再略为介紹一下第三种形式.

韋尔司特拉斯型. 这里

(16) $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$

第一、二、三类積分分別为:

$$(17)\quad I_1=J_0=\int\frac{dx}{(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}},$$

$$I_2=I_3^*=J_1=\int\frac{x\,dx}{(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}},$$

$$I_3=H_1=\int\frac{dx}{(x-c)(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}}.$$

前面几个遞推关系为:

$$(18)\quad J_2=\int\frac{x^2dx}{(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}}=\frac{1}{6}(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}+\frac{1}{12}g_2J_0,$$

$$J_3=\int\frac{x^3dx}{(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}}=\frac{1}{10}x(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}$$

$$+\frac{3}{20}g_2J_1+\frac{1}{10}g_3J_0.$$

$$H_2=\int\frac{dx}{(x-c)^2(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}}$$

$$=\frac{2(J_1-cJ_0)-(6c^2-\tfrac{1}{2}g_2)H_1-(4x^3-g_2x-g_3)^{1/2}(x-c)^{-1}}{4c^3-g_2c-g_3}.$$

勒上特型、这里

$$(19)\quad y^2=(1-x^2)(1-k^2x^2).$$

習慣上定义对应的第一、二、三类椭圓積分为

$$(20)\quad F=\int\frac{dx}{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2}}=\int\frac{d\phi}{(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}},$$

$$E=\int\left(\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}\right)^{1/2}dx=\int(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}d\phi,\qquad x=\sin\phi,$$

$$\Pi=\int\frac{dx}{(1-x^2/c^2)[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2}}$$

$$=\int\frac{d\phi}{(1-c^{-2}\sin^2\phi)(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}},\qquad x=\sin\phi.$$

一般理論的基礎積分为:

$$(21)\quad I_1=J_0=F,$$

$$(22)\quad I_2=\tfrac{1}{2}(F-E),$$

(23) $$I_3=H_1=\int\frac{(x+c)\,dx}{(x^2-c^2)[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2}}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}\,d(x^2)}{(x^2-c^2)[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2}}-\frac{1}{c}\,\Pi,$$

(24) $$I_3^*=J_1=\int\frac{x\,dx}{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2}},$$

上面(23)式中第二行的積分以及(24)式中的積分都可以初等函数計値，因此什么都可用 E, F, Π 來表示．J_n 的遞推关系为

(25) $$2k^2J_3-(1+k^2)J_1=[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2},$$

$$3k^2J_4-2(1+k^2)J_2+J_0=x[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2},$$

$$4k^2J_5-3(1+k^2)J_3+2J_1=x^2[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

H_r 的遞推关系可从方程(12)推出．

第三种典型形式曾由 A. R. Low (1950)提出，这里

(26) $$y^2=x(x-m)(x-1)$$

它是介乎韋尔司特拉斯和勒让特型之間的一种形式，具有上述二种形式的某些优点．它可从韋尔司特拉斯形式通过平移及正規化而得出，也可从勒让特形式通过代換

$$x^2=1/\xi,\qquad y^2=\eta^2/\xi^3$$

而得出．后一推導說明这一型式中的参数 m 相当于勒让特型中的 k^2.

13-4. 椭圓積分的周期和奇点

現在我們來考察積分

(1) $$I(x)=\int_a^x R(\xi,\eta)\,d\xi,$$

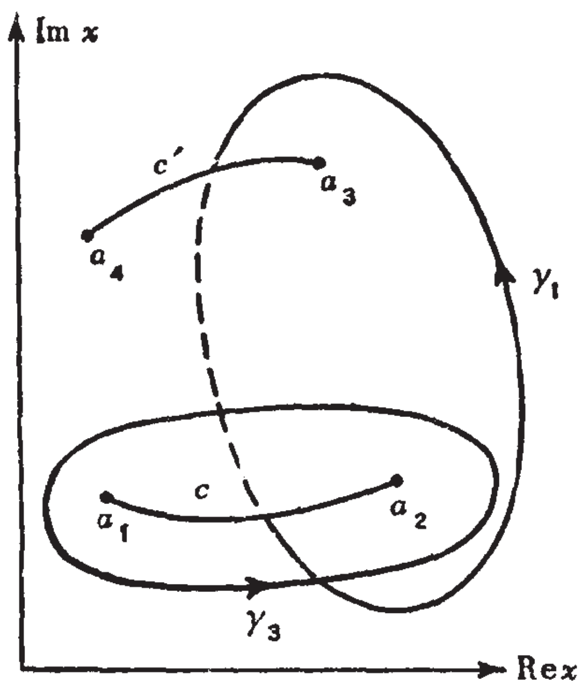
其中

(2) $$\eta^2=G(\xi)=a_0\xi^4+4a_1\xi^3+6a_2\xi^2+4a_3\xi+a_4,$$

并把 $I(x)$ 作为積分上限 x 的函数，積分下限 a 是固定的（被積函

数在 $\xi=a$ 上正則).

被積函数是 ξ 的一个双值函数,它的支点和 η 的支点重合.我們現在來研究 $I(x)$ 在 $[G(x)]^{1/2}$ 的黎曼面上而不是在 x 平面上的性态. 如 $a_0\neq 0$, 命 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 $G_4(x)$ 的四个(不同的)零点;如 $a_0=0$ 而 $a_1\neq 0$, 則命 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $G_3(x)$ 的三个(不同的)零点,并設 $\alpha_4=\infty$. 不論在那一种情形下,用弧 c 連接 α_1 及 α_2, 用弧 c' 連接 α_3 及 α_4, 使 c' 与 c 無公共点. 將二層复数 x 平面沿着弧 c 及 c' 作剖割,并沿着剖割把它們絞連起來,这样就得 $[G(x)]^{1/2}$ 的黎曼面 $\mathfrak{R}$ 的一个模型. 被積函数 $R(x, y)$ 是 $\mathfrak{R}$ 上的一个半純函数,也就是說, $R(x,y)$ 在 $\mathfrak{R}$ 上是 x 的一个單值函数,除了可能在 $\mathfrak{R}$ 的有限个点上具有極之外,在 $\mathfrak{R}$ 上是解析的. 另一方面, $I(x)$ 是 $\mathfrak{R}$ 上的一个多值函数,因为在 $\mathfrak{R}$ 上有若干閉曲綫 Γ, 不能变形为一点, 且 $\int_\Gamma R d\xi\neq 0$. 圖上的閉曲綫 γ_1 及 γ_3 就是这样的曲綫. (曲綫 γ_1 通过分枝切割, 它在圖上的虛綫部分位于黎曼曲面的"第二叶"上). 此外, 还有圍繞每一極点 (在其上留数 $\neq 0$) 的一条閉曲綫. 設 b_i 为 R 的一个極,并設 r_i 为 R 在 b_i 上的留数. 在 $\mathfrak{R}$ 上給定任一閉曲綫 C, 則由閉道的变形可知必有三个整数 m, n, p_i (正的,負的或零)滿足条件:



圖

$$\int_C R(\xi,\eta)d\xi=m\int_{\gamma_1}Rd\xi+n\int_{\gamma_3}Rd\xi+\sum_i p_i 2\pi i r_i.$$

这就是說如 $I_0(x)$ 为 $I(x)$ 的一个可能值,則这一函数的任何其他

可能值必有如下形式:

(3) $I(x)=I_0(x)+m_1\Omega_1+m_2\Omega_2+\cdots+m_k\Omega_k$,

其中 $m_1,\cdots,m_k$ 为任意整数，$\Omega_1,\cdots,\Omega_k$ 为某些不依賴于 x 的复数．它們称为 $I(x)$ 的周期或周期的模．

每一个橢圓積分至少有二个周期(例如，对应于 γ_1 及 γ_3 的周期)．在 13-3(2) 中，I_1 及 I_2 的被積函数在切割平面上不具有非零的留数，因此第一类及第二类橢圓積分恰有二个独立的周期．另一方面，$x=c$ 是 I_3 的被積函数的一个單極，其上的留数为 $[G(c)]^{-1/2}$，因此，第三类橢圓積分具有三个独立的周期．

現在我們來研究第一、二、三类橢圓積分的奇点．这三类積分在 $x=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 上都有支点，在这些支点上，它們的値是有限的，但在 $a_0=0$ 的情形下，I_2 的 $\alpha_4=\infty$ 点为唯一例外，除此之外，对于这些積分有下述性态:

第一类橢圓積分在 $\mathfrak{R}$ 上是解析的，但在 $x=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 上为例外．它在 $\mathfrak{R}$ 的每一点上有限．这是很明顯地可从它的被積函数的性态中推出的．

第二类橢圓積分在 $\mathfrak{R}$ 上是解析的，但在 $x=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 及 ∞ 处例外．如 $a_0\neq0$，則在 ∞ 处它具有極点．(如 $a_0=0$，則 $\alpha_4=\infty$，I_2 具有一支点，在此变为無限)．如 $a_0\neq0$，則在無窮远点上具有二个極点，$\mathfrak{R}$ 的每一叶上有一个，在这些極上的留数等于零．

第三类橢圓積分在 $\mathfrak{R}$ 上解析，但在 $x=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 及 c 处为例外．在 $x=c$ 处有对数奇点．共有二个 $x=c$ 点，$\mathfrak{R}$ 的每一叶上一个，在这二点的鄰域中，I_3 的性态就和

$$\pm[G(c)]^{-1/2}\ln(x-c)$$

的性态相仿．

这些橢圓積分的不同性态，很明顯地表明了一个第三类橢圓積分一般(卽除了 c 或 x 的特殊値以外)是不能化为第一及第二类積分的．

第三类椭圓積分的另一有趣的性質可用互换定理來表达．設

$$I_3(x, c)=\int_{\infty}^{x} \frac{d\xi}{(\xi-c)\eta}.$$

則

$$I_3(x, c)-I_3(c, x)=I_1(c)I_2(x)-I_1(x)I_2(c) + (2m+1)\pi.$$

本節中各項叙述的証明及其他細節参看 Tricomi (1937).

13-5. 簡化 $G(x)$ 为范式

在椭圓積分的研究中，为了方便起見，应將多項式

(1)　$G(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=y^2$

化为 13-3 節中二个标准形式之一．簡化的手續是借 x 的一个分式綫性变换來完成．对于韋尔司特拉斯型來說，$G(x)$的一个零点映成 ∞，而后把其余三个零点的形心取作原点．对于勒上特型來說，应选擇一对点，关于 $G(x)$的二对根的每一对都成从配極(与之組成交比 -1)，并將这些点映成 0 及 ∞．$G(x)$的四个根可用三种不同的方法分成二对，因此，把任一給定的 $G(x)$ 簡化为勒上特型也就有三种不同的方法．韋尔司特拉斯型比較对称，因此在理論研究上較为適用；勒上特型是較高的标准形式，在数值計算上更較合適．現有的許多数値表都是就勒上特型計算的．下面我們將概略地談一談簡化为这二种标准形式的方法．

簡化为韋尔司特拉斯范式

如 $a_0\neq 0$，应用变换

(2)　$x=a_4-\dfrac{1}{X},\quad y=\dfrac{Y}{X^2},$

將 $G(x)$簡化为三次式，这里 a_4 是 $G(x)$的一个零点．这一变换將(1)化为

(3)　$4A_1X^3+6A_2X^2+4A_3X+A_4=Y^2$

其中

(4)　$A_1 = \frac{1}{4} G'(a_4) = a_0 a_4^3 + 3 a_1 a_4^2 + 3 a_2 a_4 + a_3,$

$$A_2 = \frac{1}{12} G''(a_4) = a_0 a_4^2 + 2 a_1 a_4 + a_2,$$

$$A_3 = \frac{1}{24} G'''(a_4) = a_0 a_4 + a_1,\ A_4 = \frac{1}{24} G''''(a_4) = a_0.$$

如 $a_0 = 0$，則(1)式已有(3)的形式，就不須作初次变換.

其次，应用变換

(5)　$X = \dfrac{\xi - \frac{1}{2} A_2}{A_1},\quad Y = \dfrac{\eta}{A_1}$

來消去二次項，这就將(3)式变換成韋尔司特拉斯型

(6)　$4\xi^3 - g_2 \xi - g_3 = \eta^2$

其中

(7)　$g_2 = 3 A_2^2 - 4 A_1 A_3,\quad g_3 = 2 A_1 A_2 A_3 - A_2^3 - A_1^2 A_4.$

从(4)及(7)可知

(8)　$g_2 = a_0 a_4 + 3a_2^2 - 4 a_1 a_3$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

都是四次 $G(x)$ 的不变式；可參看 Burnside 及 Panton (1892, 160 節)的著作，其中有这些不变式表为根的对称函数的表达式. 应当注意，最后所得的形式(6)与变換中选用的 $G(x)$ 的零点 a_4 無关，且(6)中的系数都是(1)的系数的有理函数(实际是多項式). 特别是，如 $a_0, \cdots. a_4$ 都是实数，则 g_2 及 g_3 也必是实数.

簡化为勒上特范式

首先，我們來証明 $G(x)$ 可分解成如下的形式

(9)　$G(x) = [B_1(x-\beta)^2 + C_1(x-\gamma)^2]$

$$\times [B_2(x-\beta)^2 + C_2(x-\gamma)^2].$$

事实上，$G(x)$ 一定可分解为

(10) $G(x)=Q_1(x)Q_2(x)$

$Q_1(x)=p_1x^2+2q_1x+r_1,\ Q_2(x)=p_2x^2+2q_2x+r_2.$

設 λ 为一常数乘数，則如

(11) $(p_1-\lambda p_2)(r_1-\lambda r_2)-(q_1-\lambda q_2)^2=0,$

$Q_1-\lambda Q_2$ 將为一完全平方式．設 λ_1,λ_2 为(11)式的二个根，則

(12) $Q_1-\lambda_1Q_2=(p_1-\lambda_1p_2)(x-\beta)^2,$

$Q_1-\lambda_2Q_2=(p_1-\lambda_2p_2)(x-\gamma)^2,$

因此

(13) $Q_1=B_1(x-\beta)^2+C_1(x-\gamma)^2,$

$Q_2=B_2(x-\beta)^2+C_2(x-\gamma)^2,$

其中 $B_1,\cdots,\gamma$ 为某些常数；这就証明了(9)．此外，如 $a_0,\cdots,a_4$ 都是实数而 $G(x)$ 至少具有一对复根，設 $Q_1(x)$ 具有复根，則(11)式的左边在 $\lambda=0$ 时將 >0，而在 $\lambda=p_1/p_2$ 时將 $\leqslant 0$，因此，λ_1 及 λ_2 为实数，(12)中的 β 及 γ，以及(13)中的 $B_1,\cdots,C_2$ 等都是实数．如 $a_0,\cdots,a_4$ 是实数而 $G(x)$的所有根都是实数，那么分解式(10)可以排列得使 $Q_1(x)$ 的零点不与 $Q_2(x)$的零点交叉，这时不难看出 $B_1,\cdots,\gamma$ 都是实数．因此，对于一个实的 $G(x)$，恆可有一个形如(9)的实分解式存在．不僅如此，这一分解式对 G_1 及 G_3 同时成立；在后一情形下，或者是 $B_1+C_1=0$，或者是 $B_2+C_2=0$.

在(9)中令

(14) $\dfrac{x-\gamma}{x-\beta}=\left(-\dfrac{B_1}{C_1}\right)^{1/2}\xi,\quad \dfrac{y}{(x-\beta)^2}=(B_1B_2)^{1/2}\eta,$

則得勒上特范式

(15) $(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)=\eta^2,$

其中

(16) $k^2=\dfrac{B_1C_2}{B_2C_1},$

量 k 称为模．顯然我們可取 $|k^2|\leqslant 1$，如 $|k^2|=1$，則可用零点的

表1　簡化为勒上特

$G(x)$ 的所有根

$G(x)$ 的零点	首项系数	区　間	变换式 $x=$
$G_4(x)$ 四个实零点	$+1$	$a_1 \leqslant x$ 或 $x \leqslant a_4$	$\dfrac{a_1 a_{42} - a_2 a_{41} \sin^2\phi}{a_{42} - a_{41} \sin^2\phi}$
		$a_3 \leqslant x \leqslant a_2$	$\dfrac{a_3 a_{42} - a_4 a_{32} \sin^2\phi}{a_{42} - a_{32} \sin^2\phi}$
	-1	$a_4 \leqslant x \leqslant a_3$	$\dfrac{a_4 a_{31} + a_1 a_{43} \sin^2\phi}{a_{31} + a_{43} \sin^2\phi}$
		$a_2 \leqslant x \leqslant a_1$	$\dfrac{a_2 a_{31} - a_3 a_{21} \sin^2\phi}{a_{31} - a_{21} \sin^2\phi}$
$G_3(x)$ 三个实零点	$+1$	$a_3 \leqslant x \leqslant a_2$	$a_3 + a_{32} \sin^2\phi$
		$a_1 \leqslant x$	$\dfrac{a_1 - a_2 \sin^2\phi}{1 - \sin^2\phi}$
	-1	$x \leqslant a_3$	$a_1 - \dfrac{a_{31}}{\sin^2\phi}$
		$a_2 \leqslant x \leqslant a_1$	$\dfrac{a_2 a_{31} - a_3 a_{21} \sin^2\phi}{a_{31} - a_{21} \sin^2\phi}$

另一組以使 $|k^2|<1$，但 $-k^2$ 为 1 的复数立方根的所謂**等交比組**情形为例外．这一例外情形在 $(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)$ 的根位于單位圓的二直徑的端点时出現，这二直徑之間的夾角是 $\pi/6$.

現在將就 (1) 的系数为实数、在積分区間内 $G(x) \geqslant 0$ 的情形導出更为特殊的簡化公式．在这种情形下，簡化手續可借一实变換來進行，使 $0<k^2<1$. 簡化为三角形式的公式为[变量 ϕ 見 13-3 (20)]：

(17)　$y^2 = \cos^2\phi(1-k^2\sin^2\phi)$.

除以一正数以后可使首項的系数（G_4 中的 a_0，或 G_3 中的 a_1）为 ± 1，假設这样做了以后有

(18)　$G(x) = \pm \prod_i (x-a_i)$

范式的变换

都是实数

$\sin^2\phi=$	对应数值		k^2	μ
	x	ϕ		
$\frac{a_{42}}{a_{41}}\frac{x-a_1}{x-a_2}$	a_1 a_4	0 $\frac{1}{2}\pi$	$(a_1a_2a_4a_3)$	$\frac{2}{(a_{31}a_{42})^{1/2}}$
$\frac{a_{42}}{a_{32}}\frac{x-a_3}{x-a_4}$	a_3 a_2	0 $\frac{1}{2}\pi$		
$\frac{a_{31}}{a_{43}}\frac{x-a_4}{a_1-x}$	a_4 a_3	0 $\frac{1}{2}\pi$	$(a_3a_2a_4a_1)$	
$\frac{a_{31}}{a_{21}}\frac{x-a_2}{x-a_3}$	a_2 a_1	0 $\frac{1}{2}\pi$		
$\frac{x-a_3}{a_{32}}$	a_3 a_2	0 $\frac{1}{2}\pi$	$\frac{a_{32}}{a_{31}}$	$\frac{2}{(a_{31})^{1/2}}$
$\frac{x-a_1}{x-a_2}$	a_1 ∞	0 $\frac{1}{2}\pi$		
$\frac{a_{31}}{a_1-x}$	$-\infty$ a_3	0 $\frac{1}{2}\pi$	$\frac{a_{21}}{a_{31}}$	
$\frac{a_{31}}{a_{21}}\frac{x-a_2}{x-a_3}$	a_2 a_1	0 $\frac{1}{2}\pi$		

其中 G 为 G_4 时 $i=1, 2, 3, 4$, G 为 G_3 时 $i=1, 2, 3$. 应用簡号

(19) $a_{rs}=a_s-a_r$,

(20) $$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}\,\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma},$$

(21) $$\mu=\left(\frac{1-k^2\sin^2\phi}{G(x)}\right)^{1/2}\frac{dx}{d\phi},$$

这里 μ 是一常数，且

(22) $$\frac{dx}{[G(x)]^{1/2}}=\mu\,\frac{d\phi}{(1-k^2\sin^2\phi)},$$

因此 μ 出現于第一类椭圓積分的换位中.

表 1 給出了 $G(x)$ 的所有根都是实数时的变换公式，这里假定

(23) $a_1>a_2>a_3>a_4$

表 2 簡化为勒上特

$G(x)$ 具有

$G(x)$ 的零点	首項系数	区間	变換式
$G_4(x)$ 二个实零点二个复零点	1	$a_1 \leqslant x$ 或 $x \leqslant a_2$	$x=\frac{a_1+a_2}{2}-\frac{a_1-a_2}{2}\frac{\nu-\cos\phi}{1-\nu\cos\phi}$
	-1	$a_2 \leqslant x \leqslant a_1$	$(\tan\frac{1}{2}\phi)^2=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\frac{a_1-x}{x-a_2}$
$G_3(x)$ 二个复零点	1	$a_1 \leqslant x$	$x=a_1-\frac{c}{\cos\theta_1}\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}$
	-1	$x \leqslant a_1$	$(\tan\frac{1}{2}\phi)^2=\frac{\cos\theta_1}{c}(a_1-x)$
$G_4(x)$ 四个复零点 $b_1>b_2$	1	$-\infty<x<\infty$	$x=b_1+c_1\tan(\phi+\frac{1}{2}\theta_3+\frac{1}{2}\theta_4)$ $\tan(\phi+\frac{1}{2}\theta_3+\frac{1}{2}\theta_4)=(x-b_1)/c_1$
$G_4(x)$ 四个复零点 $b_1=b_2$ $c_1>c_2$			$x=b_1-c_1\operatorname{ctn}\phi$ $\tan\phi=\frac{c_1}{b_1-c}$

(如为 G_3, 应略去 a_4). 对于 $G(x)$的首項系数的二种可能情形 $+1$ 及 -1, 表內都分别列出, 表中有 $G(x)\geqslant 0$ 的区間, 变换公式, 某些对应的 x 及 ϕ 值, k^2 及 μ 值.

表 2 給出了出現复根时的对应变換公式. 在 G_3 的情形下, 实根是 a_1, 复根为

$$(24)\qquad b\pm ic \qquad\qquad c>0.$$

在 G_4 具有二个实根及一对复根的情形下, $a_1>a_2$ 是实根, 方程 (24)表示复根. 在 G_4 具有二对复根的情形下, 它的根是

$$(25)\qquad b_1\pm ic_1,\ b_2\pm ic_2, \qquad\qquad b_1\geqslant b_2,\ c_1>0,\ c_2>0.$$

这一表(表 2)上的变换公式, k^2, μ 都是以某些輔助量來表示的, 这些輔助量定义如下:

范式的变換

复根

輔助量	对应数値		k^2	μ
	x	ϕ		
θ_1 銳角 θ_2 鈍角	a_1	0	$[\sin \frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)]^2$	$\frac{(-\cos\theta_1\cos\theta_2)^{\frac{1}{2}}}{c}$
$\theta_1\theta_2$ 鈍角	a_2	π		$-\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2)^{\frac{1}{2}}}{c}$
θ_1 鈍角	a_1	0	$[\sin(\frac{1}{2}\theta_1+\frac{1}{4}\pi)]^2$	$\left(\frac{-\cos\theta_1}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$
θ_1 銳角	∞	π		$-\left(\frac{\cos\theta_1}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$
$\theta_3, \theta_4, \frac{1}{2}\theta_5$ 銳角	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\pi$ $-\frac{1}{2}\theta_3$ $-\frac{1}{2}\theta_4$	$\sin^2\theta_5$	$\left(\frac{\cos\theta_5}{c_1c_2}\right)^{\frac{1}{2}}$
	b_1	$-\frac{1}{2}\theta_3$ $-\frac{1}{2}\theta_4$		
$\theta_3=\theta_4=\frac{1}{2}\pi$	∞	$\frac{1}{2}\pi$ $-\frac{1}{2}\theta_3$ $-\frac{1}{2}\theta_4$	$1-\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2$	$\frac{1}{c_1}$

$$(26)\quad \tan\theta_1=\frac{a_1-b}{c},\quad \tan\theta_2=\frac{a_2-b}{c},$$

$$\nu=\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta_2-\tfrac{1}{2}\theta_1\right)\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta_2+\tfrac{1}{2}\theta_1\right).$$

$$(27)\quad \tan\theta_3=\frac{c_1+c_2}{b_1-b_2},\quad \tan\theta_4=\frac{c_1-c_2}{b_1-b_2},$$

$$\left(\tan\tfrac{1}{2}\theta_5\right)^2=\cos\theta_3/\cos\theta_4.$$

表1和表2中的变換公式在 $G(x)$ 的零点并不滿足表中第一格的条件及方程(23)至(25)时仍有效；不过，这时的变換式及 k^2 一般將是复数.

把橢圓積分变換成范式的簡化公式表可以在一些積分表、教科書及参考讀物中找到，这里我們提出下列書籍：Gröbner 及 Hofreiter (1949, 241–246 節, 1950, 221–223 節)；Jahnke–Emde

(1938, p 58、59); Magnus-Oberhettinger(1949, 第7章); Meyer zur Capellen (1950, 2-3 節); Oberhettinger-Magnus (1949, 2 節) 及 Tricomi (1937, p. 76, 77). 本書的二表是从 Tricomi 的著作中摘錄下來的. 还可以参看 Byrd 及 Friedman 即將出版的著作.

橢圓積分以橢圓函数計值的方法見 13-14 節, 以 θ 函数計值的方法見 13-20 節.

13-6. 勒上特橢圓積分的計值法

在 13-3 及 13-5 節中, 我們討論了把任一橢圓積分化为第一、二、三类橢圓積分的典范形式的方法. 韋尔司特拉斯范式的積分用韋尔司特拉斯橢圓函数來計值的方法將在 13-14 節中說明; 我們在这一節里將先討論勒上特橢圓積分的計値法.

首先, 令

(1) $$F(\phi, k)=\int_0^\phi (1-k^2\sin^2 t)^{-1/2}\,dt,$$

(2) $$E(\phi, k)=\int_0^\phi (1-k^2\sin^2 t)^{1/2}\,dt,$$

(3) $$\Pi(\phi, \nu, k)=\int_0^\phi (1+\nu\sin^2 t)^{-1}(1-k^2\sin^2 t)^{-1/2}\,dt,$$

使定义 13-3 (20) 更为明确. 并应注意, 除了在等交比組的情形之外, 簡化手續都可以在

(4) $$|k|<1$$

的情况下進行.

第一及第二类積分可將被積函数展开为二項式級数來計値.

(5) $$F(\phi, k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n}{n!}k^{2n}S_{2n}(\phi) \qquad |k|<1,\ |\sin\phi|\leqslant 1,$$

(6) $$E(\phi, k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1/2)_n}{n!}k^{2n}S_{2n}(\phi) \qquad |k|<1,\ |\sin\phi|\leqslant 1,$$

其中

(7) $(a)_0=1,\ (a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)=\dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$

(8) $S_{2n}(\phi)=\int_0^\phi(\sin t)^{2n}\,dt$

$$=2^{-2n}\left[\binom{2n}{n}\phi+\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\binom{2n}{n-m}\frac{\sin(2m\phi)}{m}\right],$$

由此可知，在根为实数的情形下，常有很方便的收斂級数可用以計算 F 及 E. 当模 k 接近于 1 的时候，級数的收斂較慢，这时应使用比較复什的展开式，見 Radon (1950)，他还給出了 F 及 E 的三角級数展开式. 第一、二两类橢圓積分的数值表有很多；見 Jahnke-Emde (1938, p 52–89)、Fletcher、Miller 及 Rosenhead (1946, 21 節).

由于第三类橢圓積分同时依賴于三个参数，所以它的計算就远較复什. 方程(5)及(6)的类似式为

(9) $\Pi(\phi,\nu,k)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\nu)^n B_n^{(-1/2)}(k^2/\nu)S_{2n}(\phi)$

$$|k|<1,\quad |\nu|<1,\quad |\sin\phi|<1,$$

其中

(10) $B_n^{(\alpha)}(z)=\sum_{m=0}^{n}\binom{\alpha}{m}z^m$

是截尾二項級数. (9)式中的条件 $|\nu|<1$ 使这一展开式的应用受到了限制. 其他的展开式見 Radon (1950).

用 θ 函数及雅可比橢圓函数計算 $\Pi(\phi,\nu,k)$ 的方法見 13–20 節.

下面我們提出三个公式：

(11) $\Pi(\phi,0,k)=F(\phi,k).$

(12) $(1-k^2)\Pi(\phi,-k^2,k)=E(\phi,k)$
$\qquad -(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}k^2\sin\phi\cos\phi.$

(13) $(1-k^2)\Pi(\phi,-1,k)=(1-k^2)F(\phi,k)-E(\phi,k)$
$\qquad +\tan\phi(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}.$

13-7. 勒上特椭圓典范積分的其他性質

積分

(1) $\mathbf{K}=\mathbf{K}(k)=F(\frac{1}{2}\pi, k)$, $\mathbf{E}=\mathbf{E}(k)=E(\frac{1}{2}\pi, k)$

分別称为第一类及第二类完全椭圓積分. 余模是

(2) $k'=(1-k^2)^{\frac{1}{2}}$.

又

(3) $\mathbf{K}'=\mathbf{K}'(k)=F(\frac{1}{2}\pi, k')$, $\mathbf{E}'=\mathbf{E}'(k)=E(\frac{1}{2}\pi, k')$.

不完全椭圓積分 $F(\phi, k)$ 及 $E(\phi, k)$ 是方程 13-3(19) 所定义的函数 y 的黎曼曲面 $\mathfrak{R}$ 上的多値函数. 支点为 $x=\sin\phi=\pm 1$, $\pm k^{-1}$. 周期可用完全椭圓積分來表示.

積 分	周	期
$F(\phi, k)$	$4\mathbf{K}$	$2i\mathbf{K}'$
$E(\phi, k)$	$4\mathbf{E}$	$2i(\mathbf{K}'-\mathbf{E}')$.

在上面的二种情形下,第一个周期称为实周期,第二个周期称为虛周期(因为在 $0<k<1$ 时,它們分別是实数和虛数).

虽然 $F(\phi, k)$ 及 $E(\phi, k)$ 是 $\mathfrak{R}$ 上 $x=\sin\phi$ 的多値函数,但只要对应的 F 及 E 的値是依着同一路徑積分求得的,那么我們就可以把它們当作是 $\mathfrak{R}$ 上 F 的單値函数. 这就引出了雅可比函数 $E(u)$, 見 13-16 節.

椭圓積分,正和椭圓函数一样,具有加法定理. 給定 ϕ 及 ψ, 由下面二方程來确定 χ

(4)
$$(1-k^2\sin^2\phi\sin^2\psi)\sin\chi\equiv\sin\phi\cos\psi(1-k^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}+\sin\psi\cos\phi(1-k^2\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}},$$
$$(1-k^2\sin^2\phi\sin^2\psi)\cos\chi=\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi(1-k^2\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}(1-k^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}},$$

并以 $\equiv$ 表示二个函数之間的同余关系,这二个函数相差的是它們周期的一个綫性組合(常数). 則 $E(\phi, k)$, $F(\phi, k)$ 的加法定理为

(5) $F(\chi)=F(\phi)+F(\psi)$,

(6) $E(\chi)=E(\phi)+E(\psi)-k^2\sin\phi\sin\psi\sin\chi$.

13-4 節中所提到的互換定理，以第三类橢圓積分來表示时將更为方便：

(7) $$\Pi^*(\phi,\psi,k)=\int_0^\phi \frac{k^2\cos\psi\sin\psi(1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}\sin^2 t}{(1-k^2\sin^2\psi\sin^2 t)(1-k^2\sin^2 t)^{1/2}}\,dt$$

$$=\operatorname{ctn}\psi(1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}[\Pi(\phi,-k^2\sin^2\psi,k)-F(\phi,k)],$$

而

(8) $\Pi^*(\phi,\psi)-\Pi^*(\psi,\phi)=F(\phi)E(\psi)-F(\psi)E(\phi)+n\pi i$.

这里，我們把橢圓積分的所有符号中的 k 都省略不寫了，式中的 n 是一整数.

加法定理和互換定理都是与橢圓積分及橢圓函数之間的联系有关的.

在 13-5 節中，我們曾提到 $G(x)$ 零点的重行排列將引起模的改变. 如 k 是原來的模，那么經过零点的一次重行排列后，將使模变为如下数值之一

(9) $k,\ \dfrac{ik}{k'},\ \ k',\ \dfrac{1}{k},\ \ \dfrac{1}{k'},\ \ \dfrac{k'}{ik}$.

屬于上面的任意二个模的橢圓積分之間都存在有有理关系(綫性变换). 除了(9)式所举的以外，尙有

(10) $\dfrac{1-k'}{1+k'}$.

以 k 及(10)式为模的橢圓積分之間也存在有有理关系(Landen 变換).

表 3 列出了以 (9) 或 (10) 中的任一数 $\dot{k}$ 为模的橢圓積分的变換式以 ϕ 及 k 表示变換值 $\dot{\phi}$, 以 $F(\phi,k)$, $E(\phi,k)$, ϕ 及 k 表示 $F(\dot{\phi},\dot{k})$及 $E(\dot{\phi},\dot{k})$. 我們仍用記法(2)，幷应用簡号

(11) $\Delta(\phi,k)=(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}$, $\Delta(\tfrac{1}{2}\pi,k)=k'$.

表3　橢圓積分的变换式

$\dot{k}$	$\sin\dot{\phi}$	$\cos\dot{\phi}$	$F(\dot{\phi},\dot{k})$	$E(\dot{\phi},\dot{k})$
$\frac{1}{k}$	$k\sin\phi$	$\Delta(\phi,k)$	$kF(\phi,k)$	$\frac{1}{k}[E(\phi,k)-k'^2F(\phi,k)]$
k'	$-i\tan\phi$	$\sec\phi$	$-iF(\phi,k)$	$i[E(\phi,k)-F(\phi,k)-\tan\phi\Delta(\phi,k)]$
$\frac{1}{k'}$	$-ik'\tan\phi$	$\frac{\Delta(\phi,k)}{\cos\phi}$	$-ik'F(\phi,k)$	$\frac{1}{k'}[E(\phi,k)-k'^2F(\phi,k)-\tan\phi\Delta(\phi,k)]$
$\frac{ik}{k'}$	$\frac{k'\sin\phi}{\Delta(\phi,k)}$	$\frac{\cos\phi}{\Delta(\phi,k)}$	$k'F(\phi,k)$	$\frac{1}{k'}\left[E(\phi,k)-k^2\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi,k)}\right]$
$\frac{k'}{ik}$	$-\frac{ik\sin\phi}{\Delta(\phi,k)}$	$\frac{1}{\Delta(\phi,k)}$	$-ikF(\phi,k)$	$\frac{i}{k}\left[E(\phi,k)-F(\phi,k)-k^2\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi,k)}\right]$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{(1+k')\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi,k)}$	$\frac{\cos^2\phi-k'\sin^2\phi}{\Delta(\phi,k)}$	$(1+k')F(\phi,k)$	$\frac{2}{1+k}[E(\phi,k)+k'F(\phi,k)]-(1-k')\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi,k)}$

表上的量 $\dot{\phi}$ 应以 $\sin\dot{\phi}$ 及 $\cos\dot{\phi}$ 共同确定，包括 2π 的倍数。

我們还提出下面的微分公式

$$(12)\quad \frac{\partial F}{\partial k}=\frac{1}{k'^2}\left[\frac{E-k'^2F}{k}-\frac{\sin\phi\cos\phi}{\Delta(\phi,k)}\right],$$

$$\frac{\partial E}{\partial k}=\frac{E-F}{k}.$$

13-8. 完全橢圓積分

我們应用下面的記法來表示第一、二、三类完全橢圓積分：

$$(1)\quad \mathbf{K}=\mathbf{K}(k)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\phi}{\Delta(\phi,k)}=\int_0^1\frac{dx}{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

$$(2)\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(k)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Delta(\phi,k)\,d\phi=\int_0^1\left(\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx,$$

$$(3)\quad \Pi_1=\Pi_1(\nu,k)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\phi}{(1+\nu\sin^2\phi)\Delta(\phi,k)}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{(1+\nu x^2)[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

从 13-6 (8) 有

$$(4)\quad S_{2n}(\tfrac{1}{2}\pi)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n}\phi\,d\phi=\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}\frac{\pi}{2},$$

在 13-6 (5)，(6)及(9)式中应用这一公式后可得

$$(5)\quad \mathbf{K}(k)=\frac{1}{2}\pi\,{}_2F_1(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;k^2)\qquad |k|<1.$$

$$(6)\quad \boldsymbol{E}(k)=\tfrac{1}{2}\pi\,{}_2F_1(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;k^2)\qquad |k|<1.$$

$$(7)\quad \Pi_1(\nu,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}(-\nu)^nB_n^{(-\frac{1}{2})}\binom{k^2}{\nu},\qquad |k|<1,\ |\nu|<1.$$

在(5)及(6)式中，

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!\,(c)_n}z^n$$

是高斯超比級数，見第二章.

Tricomi (1935, 1936) 还給出了下列展开式

(8) $\mathbf{K}(\sin\alpha)=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}\right]^2\sin[(4n+1)\alpha],\qquad 0<\alpha<\frac{1}{2}\pi,$

及不等式

(9) $\ln 4\leqslant\mathbf{K}+\ln k'\leqslant\frac{1}{2}\pi.$

从(5)式可以看出 $\mathbf{K}(k)$ 是 $0<k<1$ 上 k 的一个單調增函数. $\mathbf{K}(0)=\frac{1}{2}\pi$, 又从(9)式可知在 $k\to1$ 时 $\mathbf{K}$ 变为对数無窮大. 更精确地說,即

(10) $\mathbf{K}=\ln(4/k')+O(k'^2\ln k')\qquad k'\to0.$

另一方面，(6)式表明 $\boldsymbol{E}$ 是 $0<k<1$ 上的一个減函数,而从(2)式有

(11) $1\leqslant\boldsymbol{E}\leqslant\frac{1}{2}\pi\qquad 0\leqslant k\leqslant1.$

在 $k=1$ 附近正确的展开式曾有几位作者提出过,就中可参看 Radon (1950)的著作. 其中还有 Hamel (1932)提出的第三类積分的一个公式.

用 θ 函数計算第一、二类完全橢圓積分的方法見 13–20 節.

对于完全橢圓積分,有許多相当于表 3 变換式的变換式,列于下面的表 4 中.

下面的变換式特別重要

(12) $\dot{k}=\frac{1-k'}{1+k'},\ \mathbf{K}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)=\frac{1+k'}{2}\mathbf{K}(k),$

因为可用以作 $\mathbf{K}$ 的数值計算. (12)中的第一式可寫成

$$\dot{k}'=\frac{2k'^{\frac{1}{2}}}{1+k'},$$

这里,如 $0<k'<1$, 則 $k'<\dot{k}'<1$, 而如变換重复進行, k' 很快趋于 1. 对应的 $\mathbf{K}(0)$ 为 $\frac{1}{2}\pi$. 現在定义

(13) $k_0'=k',\quad k_{n+1}'=\frac{2k_n'^{\frac{1}{2}}}{1+k_n'},\qquad n=0,1,2,\cdots.$

則經重复应用(12)式以后,可得

表4 完全橢圓積分的变换式

$\dot{k}$	$\mathbf{K}(\dot{k})$	$\mathbf{K}'(\dot{k})$	$\mathbf{E}(\dot{k})$	$\mathbf{E}'(\dot{k})$
$\frac{1}{k}$	$k(\mathbf{K}+i\mathbf{K}')$	$k\mathbf{K}'$	$\frac{1}{k}(\mathbf{E}+i\mathbf{E}'-k'^2\mathbf{K}-ik^2\mathbf{K}')$	$\frac{1}{k}\mathbf{E}'$
k'	$\mathbf{K}'$	$\mathbf{K}$	$\mathbf{E}'$	$\mathbf{E}$
$\frac{1}{k'}$	$k'(\mathbf{K}'+i\mathbf{K})$	$k'\mathbf{K}$	$\frac{1}{k'}(\mathbf{E}'+i\mathbf{E}-k^2\mathbf{K}'-ik'^2\mathbf{K})$	$\frac{1}{k'}\mathbf{E}$
$\frac{ik}{k'}$	$k'\mathbf{K}$	$k'(\mathbf{K}'-i\mathbf{K})$	$\frac{1}{k'}\mathbf{E}$	$\frac{1}{k'}(\mathbf{E}'+i\mathbf{E}-k^2\mathbf{K}'-ik'^2\mathbf{K})$
$\frac{k'}{ik}$	$k\mathbf{K}'$	$k(\mathbf{K}+i\mathbf{K}')$	$\frac{1}{k}\mathbf{E}'$	$\frac{1}{k}(\mathbf{E}-i\mathbf{E}'-k'^2\mathbf{K}+ik^2\mathbf{K}')$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{1+k'}{2}\mathbf{K}$	$(1+k')\mathbf{K}'$	$\frac{\mathbf{E}+k'\mathbf{K}}{1+k'}$	$\frac{2\mathbf{E}'-k^2\mathbf{K}'}{1+k'}$
$\frac{2k^{\frac{1}{2}}}{1+k}$	$(1+k)\mathbf{K}$	$\frac{1+k}{2}\mathbf{K}'$	$\frac{2\mathbf{E}-k'^2\mathbf{K}}{1+k}$	$\frac{\mathbf{E}'+k\mathbf{K}'}{1+k}$

(14) $\mathbf{K}(k)=\frac{\pi}{2}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{2}{1+k_n'}$.

屬于余模的四个完全橢圓積分之間有下面的勒上特关系式

(15) $KE'+K'E-KK'=\frac{1}{2}\pi$.

对于 k 的各种特殊値，有下列各关系

(16) $\mathbf{K}(2^{-\frac{1}{2}})=\mathbf{K}'(2^{-\frac{1}{2}})=\frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{4\pi^{\frac{1}{2}}}$,

(17) $\mathbf{K}'\left(\sin\frac{\pi}{18}\right)=3^{\frac{1}{2}}\mathbf{K}\left(\sin\frac{\pi}{18}\right)$,

(18) $\mathbf{K}'(2^{\frac{1}{2}}-1)=2^{\frac{1}{2}}\mathbf{K}(2^{\frac{1}{2}}-1)$,

(19) $\mathbf{K}'\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}-1}{2^{\frac{1}{2}}+1}\right)=2\,\mathbf{K}\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}-1}{2^{\frac{1}{2}}+1}\right)$,

(20) $\mathbf{K}'(e^{i\pi/3})=e^{i\pi/6}\mathbf{K}(e^{i\pi/3})=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1/6)}{2\cdot 3^{\frac{3}{4}}\Gamma(2/3)}e^{-i\pi/6}$.

第一个关系相当于積分

$$\int(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}dx$$

的反演中所出現的双紐綫函数，最后一式相当于橢圓積分的等交比情形.

第三类完全橢圓積分 $\Pi_1(\nu,k)$ 可用第一及第二类不完全橢圓積分來表示. $\nu>-1$ 的情形是勒上特所發現，而 $\nu<-1$ 的情形(这时应取積分的柯西主値)是特列柯米所証明. 参数 ν 用一輔助量 θ 來表示，在区間 $(-\infty,-1)$, $(-1,-k^2)$, $(-k^2,0)$ 及 $(0,\infty)$ 上有不同的表达式，結果是：

(21) $\operatorname{ctn}\theta\Delta(\theta,k)\Pi_1(-\csc^2\theta,k)$

$=\mathbf{E}(k)F(\theta,k)-\mathbf{K}(k)E(\theta,k)$.

(22) $k'\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta(\theta,k')}[\Pi_1(-\Delta^2(\theta,k'),k)-\mathbf{K}(k)]$

$=\frac{1}{2}\pi-[\mathbf{E}(k)-\mathbf{K}(k)]F(\theta,k')-\mathbf{K}(k)E(\theta,k)$.

(23) $\operatorname{ctn}\theta\Delta(\theta, k)[\Pi_1(-k^2\sin^2\theta, k) - \mathbf{K}(k)]$

$$= -EF(\theta, k) + \mathbf{K}E(\theta, k).$$

(24) $$\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta(\theta, k')}[\Pi_1(k^2\tan^2\theta, k) - \mathbf{K}(k)\cos^2\theta)]$$

$$= [E(k) - \mathbf{K}(k)]F(\theta, k') + \mathbf{K}(k)E(\theta, k').$$

在 $\mathbf{K}, E, \Pi_1$ 之外，为方便起見，有时也用

(25) $$D(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\phi}{\Delta(\phi, k)}d\phi, \qquad B(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\phi}{\Delta(\phi, k)}d\phi,$$

$$C(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\sin\phi\cos\phi)^2}{[\Delta(\phi, k)]^3}d\phi.$$

如以 $\kappa = k^2$，則有下面的微分積分公式及各种積分之間的关系式：

(26) $$D = \frac{\mathbf{K} - E}{k^2}, \quad B = \mathbf{K} - D = \frac{E - k'^2\mathbf{K}}{k^2},$$

$$C = \frac{D - B}{k^2} = \frac{1}{k^4}[(2 - k^2)\mathbf{K} - 2E].$$

(27) $$2\frac{d\mathbf{K}}{d\kappa} = \frac{B}{1-\kappa}, \quad 2\frac{dE}{d\kappa} = -D, \quad 2\frac{dD}{d\kappa} = \frac{D - C}{1-\kappa},$$

$$2\frac{dB}{d\kappa} = C, \qquad 2\kappa\frac{dC}{d\kappa} = \frac{B}{1-\kappa} - 4C.$$

(28) $$\int\mathbf{K}\,d\kappa = 2\kappa B, \quad \int E\,d\kappa = \frac{2}{3}\kappa(E + B),$$

$$\int D\,d\kappa = -2E, \quad \int B\,d\kappa = 2(E + \kappa B),$$

$$\int C\,d\kappa = 2B.$$

至于这些積分的級数展开式及其他公式以及簡短的数值表，可参看 Jahnke-Emde (1938, p. 73–84).

第二部分 橢圓函数

13–9. 橢圓積分的反演

歷史上，橢圓函数是从橢圓積分的反演中引出的．为了得出

雅可比橢圓函数，我們來考察复变数 u 及 ϕ 之間的关系：

(1) $$u=\int_0^{\phi}(1-k^2\sin^2 t)^{-1/2}dt=F(\phi, k).$$

我們已經知道 u 是 $x=\sin\phi$ 的一个多値函数；反之，方程(1)也把 ϕ 或 $\sin\phi$ 定义为 u 的一个函数(可能是多値的)．雅可比令

(2) $$\phi=\operatorname{am} u=\operatorname{am}(u, k),$$

并把下列函数作为基礎函数

(3) $$\begin{aligned}&\operatorname{sn} u=\operatorname{sn}(u, k)=\sin(\operatorname{am} u),\\ &\operatorname{cn} u=\operatorname{cn}(u, k)=\cos(\operatorname{am} u),\\ &\operatorname{dn} u=\operatorname{dn}(u, k)=\Delta(\operatorname{am} u, k)=[1-k^2\sin^2(\operatorname{am} u)]^{1/2}.\end{aligned}$$

除了这些之外，还有下面常用的九种函数

(4) $$\begin{aligned}&\operatorname{ns} u=1/\operatorname{sn} u,\ \operatorname{nc} u=1/\operatorname{cn} u,\ \operatorname{nd} u=1/\operatorname{dn} u,\\ &\operatorname{cs} u=\operatorname{cn} u/\operatorname{sn} u,\ \operatorname{sc} u=\operatorname{sn} u/\operatorname{cn} u,\ \operatorname{sd} u=\operatorname{sn} u/\operatorname{dn} u,\\ &\operatorname{ds} u=\operatorname{dn} u/\operatorname{sn} u,\ \operatorname{dc} u=\operatorname{dn} u/\operatorname{cn} u,\ \operatorname{cd} u=\operatorname{cn} u/\operatorname{dn} u,\end{aligned}$$

这里的記法是格拉希所提出的．

在 $u=0$ 处，可令

(5) $$\operatorname{sn} 0=0,\quad \operatorname{cn} 0=\operatorname{dn} 0=1.$$

很明顯，这二式把三个基礎函数，因而也是(4)中的九个函数定义为原点的某鄰域中的單値解析函数 ($\operatorname{ns} u$, $\operatorname{cs} u$, $\operatorname{ds} u$ 除外，它們在 $u=0$ 处有單極，在这一点的有孔鄰域中解析)．橢圓函数理論的根据就是：照上面那样定义于 $u=0$ 的鄰域中的 12 个函数經解析开拓后所得的函数都是 u 的單値函数，除了在無窮多个(單)極上之外，处处解析．这一結果可从積分(1)的反演問題的討論中建立起來，可參看 Hancock (1917), Neville (1944).

韋尔司特拉斯橢圓函数是一类似的問題，二个复变数 z 及 w 之間的关系

(6) $$z=\int_{\infty}^{w}(4t^3-g_2t-g_3)^{-1/2}dt$$

可以反演而得出**韋尔司特拉斯** $\wp$ **函数**：

(7) $w=\wp(z)=\wp(z;g_2,g_3)$,

$\wp(z)$ 本身也是單値的，除了在無窮多个（二階）極上之外，处处解析．

不論在那一种情形下，反演問題都是一个比較复什的問題（積分(1)处于实数体且 $0<k<1$ 的情形当不如此），值得注意的是有另一具有很多优点的方法存在．韋尔司特拉斯曾經証明，双周期的解析函数的研究自然而然会引出橢圓函数．从此以后，習慣上，橢圓函数就能从解析函数的一般理論中引出．我們在本章中就將根据这一習慣來進行研究，至于橢圓函数与橢圓積分之間的关系將在后面 13-14 節中討論．

13-10. 双周期函数

設 $f(z)$ 为一單値函数，除了在孤立奇点上之外，处处解析．这一函数的一个周期是一复数 p，对于所有使 f 解析的 z，都有

(1) $f(z)=f(z+p)$.

具有一个（不等于零）周期的函数应具有無窮多个周期（例如 np，n 为整数）．設 Ω 为复数平面上对应于已知函数 $f(z)$ 的各个周期的点的集合．如 $f(z)$ 为一常数，則 Ω 卽为整个平面．除了这个情形之外，可以証明[例如，可参看 Tricomi, 1937, 第 1 章，第 2 節]：Ω 或者是通过原点的一条直綫上的等距离点組，或者是二族等距离平行綫（格子綫）的交点所組成的格点．在前一情形下，$f(z)$是單周期的，而在后一情形下則是双周期的．

現在我們來考察一个双周期函数 $f(z)$ 及对应的格点集 Ω. 格点可以認为是二族等距离平行綫的交点所組成（方法很多），也就是說由很多全等平行四边形所重复組成．設平行四边形中有一个的頂点之一在 0，幷設其余三个頂点为 2ω, $2\omega'$, $2\omega+2\omega'$. 則 2ω 及 $2\omega'$ 就称为是 $f(z)$ 的一对原始周期，而所有的周期則为

(2) $2\omega_{m,n}=2m\omega+2n\omega'$ $\qquad m, n$ 为整数．

很明顯，ω'/ω 并不是实数，我們可以选擇原始周期使

(3) $\quad \operatorname{Im}(\omega'/\omega)>0.$

这一約定將在本章中通用.

一个格点集可以用無窮多个方法由格子綫組成，也就是說它具有無窮多对原始周期. 設 ω, ω' 为 Ω 的原始半周期，并設 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为任何整数. 則

(4) $\quad \dot{\omega}=\alpha\omega+\beta\omega',\ \dot{\omega}'=\gamma\omega+\delta\omega'$

当然也是一对半周期. 如

(5) $\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$

則由(4)式可知

(6) $\quad \omega=\delta\dot{\omega}-\beta\dot{\omega},\ \omega'=-\gamma\dot{\omega}+\alpha\dot{\omega}',$

由此可知，ω, ω'，因而也是 $f(z)$ 的半周期，是 $\dot{\omega}, \dot{\omega}'$ 的一个整系数綫性組合，而(4)則給出了另一对原始半周期. 原始半周期的等价对之間可用單位模变换來联系:

(7) $$\begin{bmatrix}\dot{\omega}\\ \dot{\omega}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ \omega'\end{bmatrix},\quad \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=1.$$

可以証明[参看 Tricomi 1937, 第1章第2節]，一对原始周期可以选擇得使之合乎条件

(8) $\quad |\omega|\leqslant|\omega'|,\ \operatorname{Im}(\omega'/\omega)\geqslant \tfrac{1}{2}\cdot 3^{1/2},$

但这样的选擇在本章中不采用.

z 平面上二个点，如果它們相差一个周期，則称这二个点是叠合(或同形)的. 如果平面上的每一点恰巧与一个連通点集中的一点叠合，則称这一連通点集为一基本域. 通常，我們將把基本域选为平行四边形，其二边及这二边相交的頂点算作平行四边形的一部分，而把其他二边及三个頂点不作为平行四边形的部分. 固定一点 z_0，点

(9) $\quad z=z_0+2\xi\omega+2\eta\omega' \qquad 0\leqslant\xi<1,\ 0\leqslant\eta<1$

組成基本周期網. 由此經周期的平移而得的任一平行四边形，卽

点

(10)　$z=z_0+2(m+\xi)\omega+2(n+\eta)\omega'$　　$0\leqslant\xi<1,\ 0\leqslant\eta<1$

的每一个集合称为一周期網，或简称網，这里 m,n 都是整数.

由于一个双周期函数在叠合点上具有同样的值，因此，我們只要說明这种函数在任一網格上的性态就足够了. 因为 $f(z)$ 只有孤立奇点及孤立零点，故可以选擇基本周期網(即 z_0)使 $f(z)$ 的奇点或零点中沒有一个位于一網格的边界上. 在 13-11 節的一般定理中我們就这样假設，而把这样的一个網称为胞.

13-11. 椭圓函数的一般性質

一个双周期半純函数称为椭圓函数. 也就是說，一个椭圓函数可以定义为一个單值双周期解析函数，它在平面的有限部分中能有的奇点都是它的極点. 本節中，$f(z)$ 就代表这样的一个函数，ω,ω' 为 $f(z)$ 的一对原始半周期，Ω 为与 $f(z)$ 連帶的点網.

应当說明，人們常把韋尔司特拉斯 σ 函数，ζ 函数，θ 函数及其他与椭圓函数有关的函数也作为椭圓函数(廣义的)，但在本章中，我們所称的"椭圓函数"將只指上面那样定义的函数.

每一个不等于常数的椭圓函数必有極. 因为如果 $f(z)$ 在一網內沒有極，則它將在網內有界，因而在整个平面上有界，根据刘維尔定理它將为一常数.

一个椭圓函数在任一網內只具有有限数目的極，而且，如果它不恆等于零，則在这一網內只具有有限数目的零点. 因为在一網格內的無窮多个極將表示这些極有一極限点存在，因此有一本性奇点存在. 同理，不恆等于零的一个椭圓函数如果有無窮多个零点，那必將得出它有一本性奇点存在的結果.

在一个胞內的極点数称为椭圓函数的階数，这里每一極点应根据它的相重数來計数. 在一給定胞內的極点或零点的集合称为不可約集.

一个橢圓函数在任一胞内的所有極点上的留数之和等于零. 設 C 为胞的边界，留数之和为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz,$$

因为沿着相对边的積分互相抵消，故这一和等于零.

不存在有一階的橢圓函数. 因为这样的一个函数在每一胞内恰巧有一个單極，而根据上面的定理，留数等于零.

一个 r 階的橢圓函数在任一網内取每一数值恰巧 r 次（相重数也算在内）. 为了証明 $f(z)-c$ 恰具有 r 个零点，可取網格使 $f'(z)/[f(z)-c]$ 在其边界 C 上正則. $f(z)-c$ 的極点数与零点数之間的差为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz,$$

而在这一積分中，二对边部分正好相抵.

零点的一个不可約集的和与極点的一个不可約集的和重合（每一个零点及極点根据其相重数計数）. 設 C 为一个胞的边界，并設 $f(z)$ 在 C 内的零点为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$，極点为 $\beta_1, \cdots, \beta_r$. 函数 $f'(z)/f(z)$ 在一 k 階的零点上具有一單極，留数为 k. 在一 k 階極点上具有一單極，留数为 $-k$.

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{k=1}^{r}(\alpha_r-\beta_r).$$

如胞的頂点为 z_0, $z_0+2\omega$, $z_0+2\omega+2\omega'$, $z_0+2\omega'$，則(1)中的積分为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\omega}\left[\frac{(z_0+t)f'(z_0+t)}{f(z_0+t)}-\frac{(z_0+2\omega'+t)f'(z_0+2\omega'+t)}{f(z_0+2\omega'+t)}\right]dt$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\omega'}\left[\frac{(z_0+t)f'(z_0+t)}{f(z_0+t)}-\frac{(z_0+2\omega+t)f'(z_0+2\omega+t)}{f(z_0+2\omega'+t)}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{2\omega\,[\ln f(z_0+t)]_0^{2\omega'}-2\omega'\,[\ln f(z_0+t)]_0^{2\omega}\right\},$$

由于 $f(z)$ 具有周期 $2\omega, 2\omega'$, 故知 $\ln f(z_0)$, $\ln f(z_0+2\omega')$ 及 $\ln f(z_0+2\omega)$ 彼此相差为 $2\pi i$ 的整数倍数,因此,(1) 中的積分应等于 $2m\omega+2n\omega'$.

从这些定理可推出很多的系,下面我們只提出二个.

二个具有相同的周期,相同的極点,在每一極点上有相同的主部的椭圓函数相差一常数.

二个具有相同的周期,極点及零点(以及極点及零点的相重数)的椭圓函数之商是一常数.

具有相同周期$(2\omega, 2\omega')$的所有椭圓函数組成一个域 R, 即二个这样函数的和,差,積和商仍具有同样的周期. 很明顯,这种函数的任一有理函数(具有常系数)屬于 R. 此外,R 中的任一函数的導数也屬于 R. 因此 R 是一个微分域. R 中的一个函数的積分并不一定屬于 R. 虽然 $(2\omega, 2\omega')$ 是 R 中某些函数的一对原始周期,是 R 中所有函数的一对周期,但不一定是 R 中所有函数的一对原始周期.

从椭圓函数用某些标准函数(見 13-14 節)表示的表示式可得另外的几个結果.

R 中的任意二个函数 f 及 g, 可用一代数方程 $P(f, g)=0$ 來联系,这里的 $P(x, y)$是一具有常系数的多項式,而代数曲綫 $P(x, y)=0$ 是單行曲綫.

任一椭圓函数满足一个一階的代数微分方程, $P(f, f')=0$. 这里的 $P(x, y)$仍是具有常系数的多項式,虧数为零.

任一椭圓函数 $f(z)$满足一代数加法定理

$$(2)\qquad A[f(u), f(v), f(u+v)]=0,$$

这里 $A(x, y, z)$是一多項式,它的系数不依賴于 u, v, 而式 (2) 在 u, v 是同样地满足的.

反过來,可以証明凡是满足式(2)那样的代数加法定理的 z 的單值解析函数,或者是 z 的一有理函数,或者是 $e^{\lambda z}$ 的有理函数 (λ

为某一数)甚或为一椭圓函数.

最简單(不等于零)的椭圓函数是二階函数. 在这些函数中，或者把每一胞中具有一个二重極(留数为零)的函数选作标准函数，或者把每一胞中具有二个單極(具有大小相等符号相反的留数)的函数选为标准函数. 韋尔司特拉斯理論选用第一种，雅可比理論則选用第二种.

13-12. 韋尔司特拉斯函数

設 $2\omega, 2\omega'$ 为固定的一对原始周期，

(1)　$\tau=\omega'/\omega, \ \mathrm{Im}\,\tau>0$

(2)　$w=w_{mn}=2m\omega+2n\omega'.$

我們以 $\sum$ 及 Π 表示按所有整数 m, n 來求的無窮和与無窮積，而以 $\sum'$ 及 Π' 表示按所有整数 m, n ($m=n=0$ 为例外)來求的和及積.

韋尔司特拉斯函数 $\wp(z)=\wp(z|\omega, \omega')$ 是一个周期为 2ω, $2\omega'$ 的椭圓函数，階数为 2，在 $z=0$ 上有一二重極. 在这一極上函数的主部为 z^{-2}，而 $\wp(z)-z^{-2}$ 在 $z=0$ 的鄰域内解析，且在 $z=0$ 上等于零. 这些条件唯一地定义了 $\wp(z)$. 为了求得一解析表达式，可先作一具有二重極的半純函数，在所有的点 $w=w_{mn}$ 上其主部为 $(z-w)^{-2}$. 这样一个函数的部分分式展开式为

(3)　$f(z)=z^{-2}+\sum'[(z-w)^{-2}-w^{-2}].$

此外，$f(z)-z^{-2}$ 在 $z=0$ 上等于零. 將級数重行排列可証 $f(z+2\omega)=f(z)=f(z+2\omega')$，从而得出結論 $f(z)=\wp(z)$，或

(4)
$$\wp(z)=\wp(z|\omega, \omega')=\frac{1}{z^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^2}-\frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2}\right].$$

函数 $\wp(z)$ 是 z 的偶函数. 又

(5) $\wp'(z) = -2z^{-3} - 2\sum{}'(z-w)^{-3} = -2\sum(z-w)^{-3}$.

逐項積分后即得韋尔司特拉斯 ζ 函数，它是具有單極的半純函数.

(6) $\zeta(z) = \zeta(z|\omega, \omega') = z^{-1} + \sum{}'[(z-w)^{-1} + w^{-1} + zw^{-2}]$.

(7) $\wp(z) = -\zeta'(z)$.

函数 $\zeta(z)$ 是 z 的奇函数. 它不是双周期的，因此不是一椭圓函数. 通常总令

(8) $\zeta(z+2\omega) = \zeta(z) + 2\eta,\ \zeta(z+2\omega') = \zeta(z) + 2\eta'$.

由于 $\zeta(z)$ 是 z 的奇函数，故

(9) $\eta = \zeta(\omega),\ \eta' = \zeta(\omega')$.

圍繞着一个胞來積分 $\zeta(z)$，可得勒上特关系式

(10) $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{1}{2}\pi i$.

韋尔司特拉斯 σ 函数是一整函数，它的对数導数就是 ζ 函数：

(11) $$\sigma(z) = \sigma(z|\omega, \omega') = z\prod{}'\left\{\left(1-\frac{z}{w}\right)\exp\left[\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2\right]\right\},$$

(12) $$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}, \qquad \wp(z) = \frac{\sigma'^2(z) - \sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)}.$$

应用簡号

(13) $g_2 = 60\sum{}' w^{-4},\quad g_3 = 140\sum{}' w^{-6}$,

則在原点的一个鄰域中，$\sigma(z)$ 的冪級数展开式，$\zeta(z)$、$\wp(z)$、$\wp'(z)$ 的劳倫特級数展开式为

(14) $$\sigma(z) = z - \frac{g_2 z^5}{2^4\cdot 3\cdot 5} - \frac{g_3 z^7}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} - \frac{g_2^2 z^9}{2^9\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7} - \frac{g_2 g_3 z^{11}}{2^7\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11} - \cdots,$$

(15) $$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{g_2 z^3}{2^2\cdot 3\cdot 5} - \frac{g_3 z^5}{2^2\cdot 5\cdot 7} - \frac{g_2^2 z^7}{2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7} + \cdots,$$

(16) $$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2 z^2}{2^2\cdot 5} + \frac{g_2 z^4}{2^2\cdot 7} + \frac{g_2^2 z^6}{2^4\cdot 3\cdot 5^2} + \cdots.$$

$$(17)\quad \wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2 z}{2\cdot 5} + \frac{g_3 z^3}{7} + \frac{g_2^2 z^5}{2^3\cdot 5^2} + \cdots,$$

这些級数的收斂半徑等于点網 Ω 上的二点之間的最小距离，即：四数 $|2\omega|$，$|2\omega'|$，$|2\omega\pm 2\omega'|$ 中的最小一数.

如果应用記法

$$(18)\quad \omega_1 = \omega,\ \omega_2 = -\omega-\omega',\ \omega_3 = \omega'$$

$$(19)\quad \eta_\alpha = \zeta(\omega_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2, 3$$

則可將韋尔司特拉斯函数的公式表达得更为对称．我們有

$$(20)\quad \zeta(z+2\omega_\alpha) = \zeta(z) + 2\eta_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

$$(21)\quad \sigma(z+2\omega_\alpha) = -\sigma(z)\exp[2\eta_\alpha(z+\omega_\alpha)], \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

为了方便起見，可引進下面的三函数

$$(22)\quad \sigma_\alpha(z) = \frac{\sigma(z+\omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)}\exp(-z\eta_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

而对于这些函数則有

$$(23)\quad \sigma_\alpha(z+2\omega_\alpha) = -\sigma_\alpha(z)\exp[2\eta_\alpha(z+\omega_\alpha)] \qquad \alpha = 1, 2, 3$$

$$\sigma_\alpha(z+2\omega_\beta) = \sigma_\alpha(z)\exp[2\eta_\beta(z+\omega_\beta)]$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3, \qquad \alpha\neq\beta.$$

函数 $\wp'(z)$ 是一奇橢圓函数，階数为 3，周期为 $2\omega_\alpha$，$\alpha = 1, 2, 3$；在每一胞上有三个零点．今因 $\wp'$ 具有周期 $2\omega_\alpha$，故 $\wp'(-\omega_\alpha) = \wp'(\omega_\alpha)$，又因 $\wp'(z)$ 为 z 的奇函数，故 $\wp'(-\omega_\alpha) = -\wp'(\omega_\alpha)$，由此可知 $z = \omega_\alpha$，$\alpha = 1, 2, 3$ 是 $\wp'(z)$ 的零点的一个不可約集．習慣上，常令

$$(24)\quad e_\alpha = \wp(\omega_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

函数 $\wp(z) - \wp(\omega_\alpha)$ 是一二階橢圓函数．它在重合于 0 的点上具有二重極，在重合于 ω_α 的点上具有二重零点．因为它是二階的，故知上面所說的極和零点是它唯有的極和零点．因此函数 $[\wp(z) - e_\alpha]^{1/2}$ 可定义为是一个單值函数（但它不需要具有周期 2ω，$2\omega'$，見 13-13，13-16 節）．

13-13. 韋尔司特拉斯函数的其他性質

$\wp(z)$的依賴于半周期 ω, ω'，可用 $\wp(z|\omega, \omega')$ 來表达，它的依賴于不变式 g_2, g_3 可用 $\wp(z; g_2, g_3)$ 來表明；对于韋尔司特拉斯的其他函数也作同样规定.

从定义可推得下述齐性关系，对任意的 $t \neq 0$ 正确：

(1) $$\wp'(tz|t\omega, t\omega') = t^{-3}\wp'(z|\omega, \omega'),$$
$$\wp(tz|t\omega, t\omega') = t^{-2}\wp(z|\omega, \omega'),$$
$$\zeta(tz|t\omega, t\omega') = t^{-1}\zeta(z|\omega, \omega'),$$
$$\sigma(tz|t\omega, t\omega') = t\sigma(z|\omega, \omega').$$

(2) $$\wp'(tz; t^{-1}g_2, t^{-6}g_3) = t^{-3}\wp'(z; g_2, g_3),$$
$$\wp(tz; t^{-4}g_2, t^{-6}g_3) = t^{-2}\wp(z; g_2, g_3),$$
$$\zeta(tz; t^{-4}g_2, t^{-6}g_3) = t^{-1}\zeta(z; g_2, g_3),$$
$$\sigma(tz; t^{-4}g_2, t^{-6}g_3) = t\sigma(z; g_2, g_3).$$

由此可以看出，韋尔司特拉斯函数主要依賴于二个参数，这二参数可选为 z, ω, ω' 之比. 用周期來表示不变式的表达式見 13-12 (13). 反之，从 13-9 (6) 及 13-12 (24) 可得

$$\omega_\alpha = \int_\infty^{e_\alpha} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

函数

$$\wp'^2(z) \text{ 及 } [\wp(z) - e_1][\wp(z) - e_2][\wp(z) - e_3]$$

都是 6 階橢圓函数，周期为 $2\omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$. 而 ω_α, $\alpha = 1, 2, 3$ 是它們二重零点的一个不可約集，并在 0 处有一 6 階極点. 根据 13-11 節的一般定理，可知它們的商是一常数. 这一常数的值可从展开式 13-12 (4) 及 (5) 中算出. 这样，就得出了韋尔司特拉斯 $\wp$ 函数的代数微分方程如下：

(3) $$\wp'^2(z) = 4[\wp(z) - e_1][\wp(z) - e_2][\wp(z) - e_3].$$

这一微分方程可有另一个形式；注意

$$\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)$$

是一个階数不超过 6 的橢圓函数，它的所有可能極点都重合于 0. 从展开式 13-12 (16) 及 (17) 可知这一函数在 $z=0$ 上正則，因此根据 13-11 節可知为一常数．这一常数的值根据 13-12 (16) 及 (17) 可知为 $-g_3$，因而得微分方程的另一形式为

(4)　$\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3.$

比較一下(3)及(4)式的右边部分就可看出 e_α, $\alpha=1, 2, 3$ 就是代数方程 $4t^3-g_2t-g_3=0$ 的根，而代数方程根的对称函数公式可引出下述公式：

(5)　$e_1+e_2+e_3=0,$

$-4(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)=g_2,\ 4e_1e_2e_3=g_3,$

(6)　$e_1^2+e_2^2+e_3^2=\dfrac{1}{2}g_2,\ e_1^3+e_2^3+e_3^3=\dfrac{3}{4}g_3,$

$e_1^4+e_2^4+e_3^4=\dfrac{1}{8}g_2^2,$

(7)　$16(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2=g_2^3-27g_3^2=\Delta.$

最后一式是三次方程的**判別式**．

利用微分方程(4)以及 $\wp(z)$ 在 $z=0$ 上应有一極，因而在該处变为無窮大这一性質就可建立关系 13-9 (6) 及 (7)，以及第一类橢圓函数的韋尔司特拉斯范式与韋尔司特拉斯 $\wp$ 函数之間的关系．从(4)式还可有

(8)　$\wp''(z)=6\wp^2(z)-\frac{1}{2}g_2,\ \wp'''(z)=12\wp(z)\wp'(z),$

应用归納法，可知

$$\wp^{(2n-2)}(z)\quad 及\quad \wp^{(2n+1)}(z)/\wp'(z)$$

都是 $\wp(z)$ 的 n 次多項式．

$\wp$ 函数的加法定理可以寫成几种形式，如下：

(9)　$\wp(u+v)=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2-\wp(u)-\wp(v).$

$$(10)\quad \begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \end{vmatrix} = 0$$

$$(11)\quad \wp(u+v) = \wp(u) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]$$

$$= \wp(v) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right],$$

$$(12)\quad \wp(u+v)+\wp(u-v) = 2\wp(u) - \frac{\partial^2}{\partial u^2}\{\ln[\wp(u)-\wp(v)]\}.$$

这些加法定理可用几种方法求得．注意方程二边的函数都是具有相同周期、極和主部的橢圓函数，而且在某一确定点上有相同的值，就可得到上列各式的証明．

从加法定理可得韋尔司特拉斯函数的很多公式，就中有

$$(13)\quad \wp(z+\omega_\alpha) = e_\alpha + \frac{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}{\wp(z)-e_\alpha}, \qquad \alpha=1,2,3.$$

$$(14)\quad \wp(2z) = -2\wp(z) + \left[\frac{\wp''(z)}{2\wp'(z)}\right]^2,$$

$$(15)\quad \wp(\tfrac{1}{2}z) = \wp(z) + [\wp(z)-e_2]^{1/2}[\wp(z)-e_3]^{1/2} + [\wp(z)-e_3]^{1/2}[\wp(z)-e_1]^{1/2} + [\wp(z)-e_1]^{1/2}[\wp(z)-e_2]^{1/2}.$$

公式(13)中的 α, β, γ 可为 1, 2, 3 的任一排列，方程 (14) 称为**加倍公式** (Duplication Formula). (15) 式的方根应根据(22)式來取．

还有韋尔司特拉斯 ζ 及 σ 函数的对应公式：

$$(16)\quad \zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)},$$

$$(17)\quad \sigma(u+v)\sigma(u-v) = -\sigma^2(u)\sigma^2(v)[\wp(u)-\wp(v)].$$

这些公式有时称为 ζ 及 σ 函数的加法定理，不过它們并不是 13-11 (2)式定义的那种加法定理，因为 $\zeta(u)$ 及 $\sigma(u)$ 不是橢圓函数，它

們不能有加法定理．从(16)及(17)式可導出下列公式:

(18) $\zeta(z\pm\omega_\alpha)=\zeta(z)\pm\eta_\alpha+\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-e_\alpha}$, $\alpha=1,2,3.$

(19) $\zeta(z+2m\omega+2n\omega')=\zeta(z)+2m\eta+2n\eta'$, m, n 整数.

(20) $\sigma(z+2m\omega+2n\omega')=(-1)^{m+n+mn}\sigma(z)$

$\times\exp[(z+m\omega+n\omega')(2m\eta+2n\eta')]$, m, n 整数.

方程(16)至(18)可以这样來証明:將橢圓函数 $[\wp'(u)-\wp'(v)]/[\wp(u)-\wp(v)]$ 用 ζ 函数來表示，將 $\wp(u)-\wp(v)$ 用 σ 函数表示，并將 $\wp'(z)/[\wp(z)-e_\alpha]$ 用 ζ 函数表示(見下几節)卽可.

在13-12節的13-12(24)式下面我們已經說明 $[\wp(z)-e_\alpha]^{1/2}$ 可定义为是 z 的一个單値函数．要做到这一点，在取平方根的时候，可取那个能令 $z=0$ 为这一函数的一个單極，其留数为1的根．由于 $\wp'(z)$ 在接近原点处的主部为 $-2z^{-3}$，故根据上面的定义，可得

(21) $\wp'(z)=-2[\wp(z)-e_1]^{1/2}[\wp(z)-e_2]^{1/2}[\wp(z)-e_3]^{1/2}$.

为了得出 $[\wp(z)-e_\alpha]^{1/2}$ 的顯表示式，在(17)中可令 $u=z, v=\omega_\alpha$，并应用(20)及13-12(21)，得

$$\wp(z)-e_\alpha=-\frac{\sigma(z+\omega_\alpha)\sigma(z-\omega_\alpha)}{\sigma^2(z)\sigma^2(\omega_\alpha)}$$

$$=\frac{\sigma^2(z+\omega_\alpha)}{\sigma^2(z)\sigma^2(\omega_\alpha)}\exp[-2\eta_\alpha(z+\omega_\alpha)]=\left[\frac{\sigma_\alpha(z)}{\sigma(z)}\right]^2,$$

根据上面的定义求平方根，得

(22) $[\wp(z)-e_\alpha]^{1/2}=\sigma_\alpha(z)/\sigma(z)$.

特别是，如令 $z=\omega_\beta$，則

(23) $(e_\beta-e_\alpha)^{1/2}=\sigma_\alpha(\omega_\beta)/\sigma(\omega_\beta)$.

今后凡是在有平方根的公式(如(15)式)中，我們將永远假設平方根应如(22)及(23)那样确定．从(23)及13-12(22)式可得

(24) $(e_\beta-e_\alpha)^{1/2}=\frac{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma(\omega_\alpha)\sigma(\omega_\beta)}\exp(-\eta_\alpha\omega_\beta)$,

將这一式与勒让特关系式13-12(10)結合之后，可得

(25) $(e_1-e_3)^{1/2}=i(e_3-e_1)^{1/2},\ (e_1-e_2)^{1/2}=i(e_2-e_1)^{1/2}$

$(e_2-e_3)^{1/2}=i(e_3-e_2)^{1/2}.$

13-14. 用韋尔司特拉斯函数表示橢圓函数及橢圓積分的表达式

現在我們來研究將任一橢圓函数表为标准函数的問題，这种表达式或者是 $\wp$ 及 $\wp'$ 的一个有理組合（$\wp'$ 的綫性組合），或者是 ζ 函数及其導数的一个綫性組合，甚或是 σ 函数的二个積的商．設 $f(z)$ 为一橢圓函数，周期为 $2\omega,\ 2\omega'$，并設 $\wp(z),\ \zeta(z),\ \sigma(z)$ 为以 $2\omega,\ 2\omega'$ 为原始周期作出的韋尔司特拉斯函数．

用 $\wp(z)$ 及 $\wp'(z)$ 表示的表达式

首先，設 $f(z)$ 为 z 的偶函数．如 $f(z)$ 在 $z=0$ 处具有一个零点或極，这一零点或極应是偶数階的，因此 $f(z)[\wp(z)]^s$ 在某一整数 s 下应在 $z=0$ 上解析且 $\neq 0$. 偶函数 $f(z)[\wp(z)]^s$ 的零点及極点將对称地分布于原点的周圍．設 $\alpha_1,\cdots,\alpha_h,\ -\alpha_1,\cdots,\ -\alpha_h$ 为零点的一个不可約集，而 $\beta_1,\cdots,\beta_h,\ -\beta_1,\cdots,\ -\beta_h$ 为極点的一个不可約集，每一个零点或極点均按其相重数重复計数．則

$$f(z)[\wp(z)]^s\prod_{r=1}^{h}\frac{\wp(z)-\wp(\beta_r)}{\wp(z)-\wp(\alpha_r)}$$

將是沒有零点或極点的橢圓函数，因此是一常数．一个偶橢圓函数可表为 $\wp(z)$ 的有理函数．設 $f(z)$ 为任一橢圓函数

$$f(z)=\frac{1}{2}[f(z)+f(-z)]+\wp'(z)\frac{f(z)-f(-z)}{2\wp'(z)},$$

这里 $f(z)+f(-z)$ 及 $[f(z)-f(-z)]/\wp'(z)$ 是偶橢圓函数，因此是 $\wp(z)$ 的有理函数．由此說明任一橢圓函数可以表成如下形式

(1) $\quad f(z)=R_1[\wp(z)]+R_2[\wp(z)]\wp'(z),$

这里 $R_1(w)$ 及 $R_2(w)$ 是 w 的有理函数．

从这里，以及 $\wp$ 函数的微分方程及加法定理可以很容易地看出任一橢圓函数必具有一个代数微分方程及一个代数加法定理，而任意二个具有相同周期的橢圓函数可用代数关系來联系(見 13-11 節)．

以 ζ 函数表示的表达式．

函数 $\zeta(z)$ 不是个橢圓函数，但根据 13-13 (19) 式不难看出

$$\sum_{r=1}^{h} c_r \zeta(z-\gamma_r)$$

在而且只有在

$$\sum_{r=1}^{h} c_r = 0$$

时將为一橢圓函数．不僅如此，由于 $\zeta'(z) = -\wp(z)$，因此 $\zeta(z)$ 的所有導数都是橢圓函数．

設 $\beta_1, \cdots, \beta_h$ 为 $f(z)$ 的不同極点的一个旣約集，并設

$$\sum_{s=1}^{m_r} b_{r,s}(z-\beta_r)^{-s}$$

为 $f(z)$ 在 $z=\beta_r$ 鄰域中的主部(劳倫特展开式中負数次方的和)，$z=\beta_r$ 为一 m_k 階極点．考察

$$\phi(z) = f(z) - \sum_{r=1}^{h} \sum_{s=1}^{m_r} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} b_{r,s} \zeta^{(s-1)}(z-\beta_r).$$

今

$$\sum_{r=1}^{h} b_{r,1} \zeta(z-\beta_r)$$

是一橢圓函数，因为極点的一个旣約集上的留数之和 $\sum b_{r,1}$ 等于零(見 13-11 節)．又 $\zeta^{(s-1)}(z-\beta_r)$ 在 $s=2, 3, \cdots$ 时为一橢圓函数，因此 $\phi(z)$ 是橢圓函数．由于 $\zeta(z-\beta_r)$ 在 $z=\beta_r$ 上的主部为 $(z-\beta_r)^{-1}$，故知 $\phi(z)$ 在 $z=\beta_1, \cdots, \beta_h$ 上沒有極，因此就沒有極点而为常数．任一橢圓函数可表为

$$(2) \qquad f(z) = b_0 + \sum_{r=1}^{h} \sum_{s=1}^{m_r} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} b_{r,s} \zeta^{(s-1)}(z-\beta_r).$$

这样的一个表达式主要用在椭圓函数的積分上．从(2)，13–12(7)及 13–12 (12)，得

$$(3)\qquad \int f(u)\,du=b_0u+c+\sum_{r=1}^{h}\{b_{r,1}\ln[\sigma(u-\beta_r)]$$
$$-b_{r,2}\zeta(u-\beta_r)+\sum_{s=3}^{m_r}\frac{(-1)^s}{(s-1)!}b_{r,s}\wp^{(s-3)}(u-\beta_r)\}.$$

展开式(2)可用以建立 13–13 (16)及(18)．

以 σ 函数表示的表达式

虽然 $\sigma(z)$ 本身不是椭圓函数，但根据 13–13 (20)式不难看出

$$(4)\qquad \psi(z)=\prod_{r=1}^{h}\frac{\sigma(z-\alpha_r)}{\sigma(z-\beta_r)}$$

在而且只有在 $\sum_{r=1}^{h}(\alpha_r-\beta_r)=0$ 时是一个椭圓函数．設 $\alpha_1,\cdots,\alpha_h$；$\beta_1,\cdots,\beta_h$ 是 $f(z)$的零点及極点的既約集，每一个都应根据它的相重数而重复計数．根据 13–11 節可知 $\sum_{r=1}^{h}(\alpha_r-\beta_r)$是一个周期，將某些零点和極点用它們的重合点來代替，于是可設 $\sum_{r=1}^{h}(\alpha_r-\beta_r)=0$. 这样就可按(4)式來作出 $\psi(z)$，可以看出 $f(z)/\psi(z)$ 是一个沒有零点及極点的椭圓函数，因此必为常数．任一椭圓函数可表为

$$(5)\qquad f(z)=c\prod_{r=1}^{h}\frac{\sigma(z-\alpha_r)}{\sigma(z-\beta_r)},$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_h$ 为 $f(z)$的零点的一个既約集，$\beta_1,\cdots,\beta_h$ 为 $f(z)$的極点的一个既約集，每一个零点及極点都应按其相重数重复計数，而这二集的选擇应使

$$(6)\qquad \sum_{r=1}^{h}\alpha_r=\sum_{r=1}^{h}\beta_r.$$

表示式(5)可用以証明 13–13 (17)．

椭圓積分

給定一个橢圓積分，寫成韋尔司特拉斯的典型形式为：

(7) $I=\int R(x,y)dx,\quad y^2=4x^3-g_2x-g_3,$

可令

(8) $x=\wp(z;g_2,g_3),\ y=\wp'(z;g_2,g_3),$

而將(7)式化成

(9) $I=\int R[\wp(z),\wp'(z)]\wp'(z)dz.$

被積函数是 $\wp(z)$ 及 $\wp'(z)$ 的一个有理函数，因此是一橢圓函数，設为 $f(z)$：它有一个展开式如(2)，積分本身可計算成(3)的形式.

代換式(8)代表的是代数曲綫

(10) $y^2=4x^3-g_2x-g_3$

上的点，坐标 x 及 y 是参数 z 的單値函数，参数 z 是(10)式的一个單値化变量(見 13-2 節).

任一橢圓積分

(11) $I=\int R(x,y)dx,$

(12) $y^2=G(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4$

都可以化成韋尔司特拉斯函数. 先將(12)式化成 13-5 節的韋尔司特拉斯典型形式，而后像上面那样進行. 应用韋尔司特拉斯函数的不变式 13-5 (8)，就可以避免 13-5 節中所述的計算手續. 关于这一方面，可参看 Bianchi (1916, 371-374)，其中有包含(12)式的第一类橢圓積分的計算方法.

13-15. 韋尔司特拉斯函数的摹繪性質及退化情形

在很多的应用中，$G(x)$ 的系数都是实数. 这时，根据 13-5 (8) 可知不变式 g_2, g_3 也是实数. 現在我們將概略地說明 g_2 及 g_3 为实数时 $\wp(z)$ 的性态，根据判別式 $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ 的为正或为負而分成两种情况.

首先設 $\Delta>0$. 这时有一对原始周期 $2\omega, 2\omega'$, 因此 ω 是实数而 ω' 为虚数. 所有周期的点網可由矩形網格來生成. 在網格綫上,函数 $\wp(z)$ 是实数,

$$\operatorname{Re} z=2m\omega, \qquad m \text{ 为整数},$$
$$i\operatorname{Im} z=2n\omega', \qquad n \text{ 为整数},$$

又在中部綫上

$$\operatorname{Re} z=(2m+1)\omega, \qquad m \text{ 为整数},$$
$$i\operatorname{Im} z=(2n+1)\omega', \qquad n \text{ 为整数}.$$

我們有下面的对称关系

$$\wp(z_1+iz_2)=\overline{\wp(z_1-iz_2)}=\wp(-z_1-iz_2)=\overline{\wp(-z_1+iz_2)},$$

这里 z_1 及 z_2 都是实数,一划表示共轭复数. 在这种情形下 e_1, e_2, e_3 都是实数, $e_1>e_2>e_3$, $e_1>0$, $e_3<0$. 当 z 描出矩形 $0, \omega, \omega+\omega', \omega', 0$ 的边界时, 函数 $\wp(z)$ 將由 $+\infty$ 减小为 $e_1=\wp(\omega)$, 再减为 $e_2=\wp(\omega+\omega')$, $e_3=\wp(\omega')$ 而至 $-\infty$.

現在設 $\Delta<0$. 这一情形与上一情形有很大的不同. 还是有一对周期,其第一个是实数,第二个是虚数,但却不是原始周期. 不过,这里有一对共轭复数的原始周期,組成一菱形式的基本平行四边形. 如 $2\omega, 2\omega'$ 为一对共轭复数原始周期,則周期平行四边形的对角綫为

$$\operatorname{Re} z=m(\omega+\omega') \qquad m \text{ 为整数},$$
$$i\operatorname{Im} z=n(\omega-\omega') \qquad n \text{ 为整数},$$

而这二条綫是 $\wp(z)$ 在其上为实数的唯有的綫. 在这种情况下,只有 e_2 是实数, e_1 及 e_3 是共轭的复数. 当 z 沿着周期平行四边形的对角綫由 0 变化至 $\omega+\omega'$, 再至 2ω (或 $2\omega'$) 时, $\wp(z)$ 則从 $+\infty$ 减小至 e_2 再至 $-\infty$.

当一个或二个周期变为無窮大,或者說, e_1, e_2, e_3 中有二个或所有三个数相重的时候,即發生韋尔司特拉斯函数的**退化情形**. 我們現在列出下面三种情形:

(i) 实周期为無窮大

(1) $e_1 = e_2 = \alpha,\ e_3 = -2\alpha,$

(2) $g_2 = 12\alpha^2,\ g_3 = -8\alpha^3,\ \omega = \infty,\ \omega' = (12\alpha)^{-1/2}\pi i,$

(3) $\wp(z;\, 12\alpha^2, -8\alpha^3) = \alpha + 3\alpha\{\operatorname{sh}[(3\alpha)^{1/2}z]\}^{-2},$

(4) $\zeta(z;\, 12\alpha^2, -8\alpha^3) = -\alpha u + (3\alpha)^{1/2}\operatorname{ctnh}[(3\alpha)^{1/2}z],$

(5) $\sigma(z;\, 12\alpha^2, -8\alpha^3) = (3\alpha)^{-1/2}\operatorname{sh}[(3\alpha)^{1/2}z]\exp(-\tfrac{1}{2}\alpha z^2).$

(ii) 虛周期为無窮大

(6) $e_1 = 2\alpha,\ e_2 = e_3 = -\alpha,$

(7) $g_2 = 12\alpha^2,\ g_3 = 8\alpha^3,\ \omega = (12\alpha)^{-1/2}\pi,\ \omega' = i\infty,$

(8) $\wp(z;\, 12\alpha^2, 8\alpha^3) = -\alpha + 3\alpha\{\sin[(3\alpha)^{1/2}z]\}^{-2},$

(9) $\zeta(z;\, 12\alpha^2, 8\alpha^3) = \alpha z + (3\alpha)^{1/2}\operatorname{ctn}[(3\alpha)^{1/2}z],$

(10) $\sigma(z;\, 12\alpha^2, 8\alpha^3) = (3\alpha)^{-1/2}\sin[(3\alpha)^{1/2}z]\exp(\tfrac{1}{2}\alpha z^2).$

(iii) 二周期都是無窮大

(11) $e_1 = e_2 = e_3 = 0,\ g_2 = g_3 = 0,\ \omega = -i\omega' = \infty,$

(12) $\wp(z;0,0) = z^{-2},\ \zeta(z;0,0) = z^{-1},\ \sigma(z;0,0) = z.$

在所有上面的三种情形下，$\Delta = 0$.

13-16. 雅可比橢圓函数

雅可比函数

(1) $w = \operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u, k),$

像在 13-9 節中那样，可由積分

(2) $$u = \int_0^w [(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{-1/2}dx$$

來定义，式中的平方根在 $x=0$ 时取值为 1，且 $\operatorname{sn}(0,k)=1$. 这一積分可用韋尔司特拉斯函数來計值(見 13-14 節)，結果得

(3) $e_1 : e_2 : e_3 = (2-k^2) : (2k^2-1) : -(1+k^2),$

$z = (e_1 - e_3)^{-1/2}u,$

及

(4) $$\operatorname{sn}(u,k)=\frac{(e_1-e_3)^{1/2}}{[\wp(z)-e_3]^{1/2}},$$

对于其他二个雅可比基礎函数，有

(5) $$\operatorname{cn}(u,k)=\frac{[\wp(z)-e_1]^{1/2}}{[\wp(z)-e_3]^{1/2}},$$

(6) $$\operatorname{dn}(u,k)=\frac{[\wp(z)-e_2]^{1/2}}{[\wp(z)-e_3]^{1/2}}.$$

在(4)，(5)，(6)中，

(7) $$u=(e_1-e_3)^{1/2}z,\quad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},$$

这里所有的平方根都以13-13 (22)及(23)式唯一地定义．应用后面这些关系，可將(4)至(6)式寫为

(8) $$\operatorname{sn}(u,k)=(e_1-e_3)^{1/2}\frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)},\quad \operatorname{cn}(u,k)=\frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)},$$

$$\operatorname{dn}(u,k)=\frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)}.$$

13-9(4)中的 9 个輔助函数，同样可用 σ 函数來表示．对于这些函数一般都省略不論，因为有关于它們的公式都可以很容易地从三个基礎函数(8)的公式中推出．

在 13-9 節中，我們用椭圓積分的反演在原点的鄰域中确立出雅可比椭圓函数．方程(8)表明这些函数的解析开拓可引出許多單值解析函数，它們的極点在 $\sigma_3(z)$ 的零点上．不过，从(8)及13-12 (23) 式不难看出雅可比函数都是双周期的．令

(9) $$u=(e_1-e_3)^{1/2}z,\ \mathbf{K}=(e_1-e_3)^{1/2}\omega,\ i\mathbf{K}'=(e_1-e_3)^{1/2}\omega',$$

并称 $\mathbf{K}$ 为实四分之一周期，$\mathbf{K}'$ 为虚四分之一周期，根据 $\mathbf{K}$ 及 $\mathbf{K}'$ 的定义，可証(9)是 13-7 (1)及(2)中的完全椭圓積分．sn, cn, dn 的原始周期現在可用 13-12 (23)式來求．$\sigma(z)$ 的零点都是單階的，可从 13-12 (11) 式得出；而 $\sigma_\alpha(z)$ 的零点則可从 13-12 (22) 式得出．这就給出了雅可比函数的(單)零点及極点．最后，利用

13–12 (14)及 13–13 (23)可确定三函数(8)的留数．这些結果列于表 5.

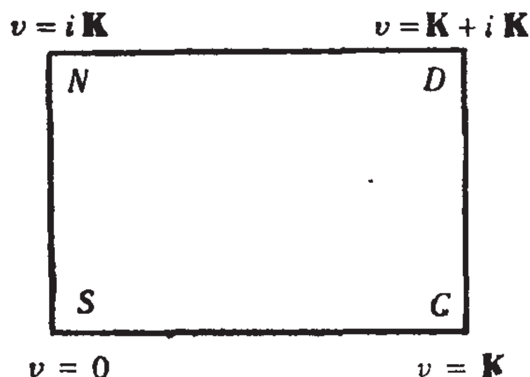
表 5　雅可比橢圓函数的周期，零点，極点及留数

m 及 n 都是整数

函数	原始周期	零点	極点	留数
$\operatorname{sn}(u,k)$	$4K$ $2iK'$	$2mK+2niK'$	$2mK$ $+(2n+1)iK'$	$\frac{(-1)^m}{k}$
$\operatorname{cn}(u,k)$	$4K$ $2K+2iK'$	$(2m+1)K+2niK'$		$\frac{(-1)^{m+n}}{ik}$
$\operatorname{dn}(u,k)$	$2K$ $4iK'$	$(2m+1)K+(2n+1)iK'$		$(-1)^{n+1}i$

如果 $0<k^2<1$，则 K 及 K' 是实数．e_α 也可作为实数，从(3)可知在 ω 为实数而 ω' 为虚数时，可取 $e_1>e_2>e_3$. 这就是 13–15 節 $\Delta>0$ 的情形.

对于任意的 $k^2(\neq 0, 1)$，我們可把平行四边形取为 sn 或 dn 的基本平行四边形的八分之一，并以 S, C, D, N 表示其頂点，如圖．应用这一記法，12 个雅可比函数的符号中的第一个字母將表示一个零点的位置，而第二个字母则表示一个極的位置．零点和極点按半周期作重复.



从表 5 不难証明，任何一个胞包含任一雅可比橢圓函数的二个單極(留数之和等于零)及二个一階零点．因此，雅可比函数 $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ 都是二階橢圓函数．在模 k 为已知的时候，如果 k 平面沿着 $-\infty$ 至 -1 及 1 至 ∞ 作剖割，则四分之一周期 K, K' 可用 13–7 (1) 及 (2)來唯一地确定．因此，表 5 的数据可唯一地确定雅可比函数．我們把这些表成 σ 函数，但也可以像 13–12 節那样独立作出．参看 Neville (1944)，其中有 12 个雅可比函数按对

称形式作出的方法(不过,应当注意,Neville所用的記法与本書所用的習慣記法是不同的).

勒上特第二类完全橢圓積分也可用韋尔司特拉斯函数來表示:

(10) $$E=\frac{e_1\omega+\eta}{(e_1-e_3)^{1/2}},\quad E'=i\,\frac{e_3\omega'+\eta'}{(e_1-e_3)^{1/2}}.$$

模 k 及余模 k' 可唯一地确定为

(11) $$k=\frac{(e_2-e_3)^{1/2}}{(e_1-e_3)^{1/2}},\quad k'=\frac{(e_1-e_2)^{1/2}}{(e_1-e_3)^{1/2}}.$$

給定任一模 k, 方程(3)就可确定出 e_α (尙有一不相关的因子),因而按13–13 (5)可定出不变式. 以这些不变式作出的韋尔司特拉斯函数,就可完全确定雅可比函数、它們的周期以及完全橢圓積分. 反过來,以任何不变式作成的韋尔司特拉斯函数可确定雅可比函数,它的模按(11)式計算.

在13–7節中已經指出,第二类(不完全)橢圓積分是 u 的單値函数. 这就定义了雅可比函数 $E(u)$. 在13–6(2)中,令 $\phi=\mathrm{am}(u,k)$, $\sin\phi=\mathrm{sn}\,(u,k)$, $\sin t=\mathrm{sn}\,(x,k)$, 則得

(12) $$E(u)=\int_0^u \mathrm{dn}^2\,(x,k)\,dx.$$

雅可比函数 $E(u)$不是周期函数,因为

(13) $$E(u+2\mathbf{K})=E(u)+2E,$$
$$E(u+2i\mathbf{K}')=E(u)+2i(\mathbf{K}'-E').$$

有时为了方便起見,常应用函数

(14) $$Z(u)=E(u)-\frac{E}{\mathbf{K}}u,$$

它是單周期的,因为

(15) $$Z(u+2\mathbf{K})=Z(u),\quad Z(u+2i\mathbf{K}')=Z(u)-i\pi/\mathbf{K}.$$

虽然函数 $E(u)$, $Z(u)$都不是橢圓函数,但它們有很多性質与橢圓函数相似,可参看 Whittaker 及 Watson (1927, p 517–520).

13-17. 雅可比橢圓函数的其他性質

下面我們將应用簡寫符号

(1) $s=\operatorname{sn}(u,k),\ c=\operatorname{cn}(u,k),\ d=\operatorname{dn}(u,k).$

下面的基礎公式是雅可比函数的定义以及韋尔司特拉斯$\wp$函数性質的直接推論. 关于u的微商用一撇表示,即

$$(s)'=ds/du,\quad (s)''=d^2s/du^2,\ \text{等等}.$$

(2) $s^2+c^2=1,\ k^2s^2+d^2=1,\ d^2-k^2c^2=k'^2,$

(3) $(s)'=cd,\ (c)'=-sd,\ (d)'=-k^2sc,$

(4) $(s)''=-s(d^2+k^2c^2),\ (c)''=-c(d^2-k^2s^2),$

$(d)''=-k^2d\,(c^2-s^2).$

(5) $(s)'^2=(1-s^2)(1-k^2s^2),$

(6) $(c)'^2=(1-c^2)(k^2c^2+k'^2),$

(7) $(d)'^2=(1-d^2)(d^2-k'^2),$

(8) $\operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn}(u),\ \operatorname{cn}(-u)=\operatorname{cn}u,\ \operatorname{dn}(-u)=\operatorname{dn}u.$

(9) $\operatorname{sn}(2\mathbf{K}-u)=\operatorname{sn}u,\ \operatorname{cn}(2\mathbf{K}-u)=-\operatorname{cn}u,$

$\operatorname{dn}(2\mathbf{K}-u)=\operatorname{dn}u.$

(10) $\operatorname{sn}(2i\mathbf{K}'-u)=-\operatorname{sn}u,\ \operatorname{cn}(2i\mathbf{K}'-u)=-\operatorname{cn}u,$

$\operatorname{dn}(2i\mathbf{K}'-u)=-\operatorname{dn}u.$

冪級数展开式

(11) $\operatorname{sn}(u,k)=u-(1+k^2)\dfrac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\dfrac{u^5}{5!}-\cdots$

$\operatorname{cn}(u,k)=1-\dfrac{u^2}{2!}+(1+4k^2)\dfrac{u^4}{4!}-(1+44k^2+16k^4)\dfrac{u^6}{6!}+\cdots$

$\operatorname{dn}(u,k)=1-k^2\dfrac{u^2}{2!}+k^2(4+k^2)\dfrac{u^4}{4!}$

$$-k^2(16+44k^2+k^1)\frac{u^6}{6!}+\cdots,$$

收斂半徑为

(12)　$\min(|\mathbf{K}'|, |2\mathbf{K}+i\mathbf{K}'|, |2\mathbf{K}-i\mathbf{K}'|)$.

应用 $\wp$ 函数的加法定理及变换(見13-22節表11)

(13)　$\operatorname{sn}(iu, k)=i\operatorname{sc}(u, k')$, $\operatorname{cn}(iu, k)=\operatorname{nc}(u, k')$

$\operatorname{dn}(iu, k)=\operatorname{dc}(u, k')$,

可得雅可比椭圓函数的加法定理. 在下列加法定理中,我們將用簡号

(14)　$s_1=\operatorname{sn}(u_1, k)$, $s_2=\operatorname{sn}(u_2, k)$, $s_2'=\operatorname{sn}(u_2, k')$,

对于 cn 及 dn, 也用相似的簡号. 于是有

(15)　$\operatorname{sn}(u_1+u_2, k)=(s_1c_2d_2+d_1c_1s_2)/(1-k^2s_1^2s_2^2)$,

$\operatorname{cn}(u_1+u_2, k)=(c_1c_2-s_1d_1s_2d_2)/(1-k^2s_1^2s_2^2)$,

$\operatorname{dn}(u_1+u_2, k)=(d_1d_2-k^2s_1c_1s_2c_2)/(1-k^2s_1^2s_2^2)$,

(16)　$\operatorname{sn}(u_1+i\,u_2, k)=(s_1d_2'+i\,c_1d_1s_2'c_2')/(c_2'^2+k^2s_1^2s_2'^2)$,

$\operatorname{cn}(u_1+i\,u_2, k)=(c_1c_2'-i\,s_1d_1s_2'd_2')/(c_2'^2+k^2s_1^2s_2'^2)$,

$\operatorname{dn}(u_1+i\,u_2, k)=(d_1c_2'd_2'-i\,k^2s_1c_1s_2')/(c_2'^2+k^2s_1^2s_2'^2)$.

(17)　$\operatorname{sn}(2u, k)=2scd/(1-k^2s^4)$,

$\operatorname{cn}(2u, k)=(c^2-s^2d^2)/(1-k^2s^4)$,

$\operatorname{dn}(2u, k)=(d^2-k^2s^2c^2)/(1-k^2s^4)$,

(18)　$\operatorname{sn}(\tfrac{1}{2}u, k)=(1-c)^{1/2}(1+d)^{-1/2}$,

$\operatorname{cn}(\tfrac{1}{2}u, k)=(d+c)^{1/2}(1+d)^{-1/2}$,

$\operatorname{dn}(\tfrac{1}{2}u, k)=(d+k^2c+k'^2)^{1/2}(1+d)^{-1/2}$.

在公式(17)及(18)中,我們用到記法(1). 方程(16)表明任一复数 u 的雅可比椭圓函数的值, 在已知这些函数在实軸上的值以及余模函数在实軸上的值的条件下是可以算出的.

还有下面的富里哀展开式

(19)　$$\operatorname{sn}u=\frac{2\pi}{k\mathbf{K}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}}\sin(2n-1)\frac{\pi u}{2\mathbf{K}},$$

$$\operatorname{cn}u=\frac{2\pi}{k\mathbf{K}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}}\cos(2n-1)\frac{\pi u}{2\mathbf{K}},$$

$$\mathrm{dn}\, u=\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos n\frac{\pi u}{\mathbf{K}}\right],$$

其中

(20) $q=e^{i\pi\tau}=\exp(-\pi\mathbf{K}'/\mathbf{K})$.

展开式(19)在复数平面上由直綫 $\pm i\mathbf{K}'+\lambda\mathbf{K}$, $-\infty<\lambda<\infty$ 所圍成的帶內有效.

在点 $m\mathbf{K}+ni\mathbf{K}'$ (m, n 整数) 上 sn, cn, dn 的值可用 13-12 (24)式來計算；算出了这些数値以后，应用公式(18)就可求出点

(21) $\frac{1}{2}m\mathbf{K}+\frac{1}{2}ni\mathbf{K}'$, m, n, 整数

上的值. $m\geqslant 0$, $n\leqslant 3$ 的結果列于表 6. 表 6 中选擇的点在每一种情形下都取値于半个胞內，在另一半个胞中点(21)上的值可应用表 7 求得，在其他的点(21)上的值可根据 sn, cn, dn 的周期性質推出. 在这一表中，所有的平方根在 $0<k<1$ 时取为正，在其他情形下則由解析开拓來定义.

从加法定理及表 6, 我們可以得出雅可比函数在点 $\frac{1}{2}mK+$ $+\frac{1}{2}ni\mathbf{K}'+u$ 的値，以它們在点 u 上的値表示. 表 7 就是点 $mK+ni\mathbf{K}'\pm u$ 上的結果. 表所包括的不止一个胞，以便顯示出雅可比函数在 S, C, D, N 点周圍的对称性. 在表中应用簡号(1)，而

表 6 雅可比橢圓函数的特殊值

$\mathrm{sn}\,(\frac{1}{2}mK+\frac{1}{2}ni\,K')$

$\frac{1}{2}niK'$ \ $\frac{1}{2}mK$	0	$\frac{1}{2}K$	K	$\frac{3}{2}K$
0	0	$(1+k')^{-1/2}$	1	$(1+k')^{-1/2}$
$\frac{1}{2}iK'$	$ik^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2}+i(1-k)^{1/2}]$	$k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2}-i(1-k)^{1/2}]$
iK'	∞	$(1-k')^{-1/2}$	k^{-1}	$(1-k')^{-1/2}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-ik^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2}-i(1-k)^{1/2}]$	$k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2}[(1+k)^{1/2}+i(1-k)^{1/2}]$

表 6 (續)

$\mathrm{cn}\,(\frac{1}{2}\,m\boldsymbol{K}+\frac{1}{2}ni\,\boldsymbol{K}')$

$\frac{1}{2}mK$ \ $\frac{1}{2}niK'$	0	$\frac{1}{2}K$	K	$\frac{3}{2}K$
0	1	$k'^{1/2}(1+k')^{-1/2}$	0	$-k'^{1/2}(1+k')^{-1/2}$
$\frac{1}{2}iK'$	$k^{-1/2}(1+k)^{1/2}$	$k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1-i)$	$-ik^{-1/2}(1-k)^{1/2}$	$-k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1+i)$
iK'	∞	$-ik'^{1/2}(1-k')^{-1/2}$	$-ik^{-1}k'$	$-ik'^{1/2}(1-k')^{-1/2}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-k^{-1/2}(1+k)^{1/2}$	$-k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1+i)$	$-ik^{-1/2}(1-k)^{1/2}$	$k'^{1/2}(2k)^{-1/2}(1-i)$

表 6 (續)

$\mathrm{dn}(\frac{1}{2}\,m\boldsymbol{K}+\frac{1}{2}\,ni\,\boldsymbol{K}')$

$\frac{1}{2}mK$ \ $\frac{1}{2}niK'$	0	$\frac{1}{2}K$	K	$\frac{3}{2}K$
0	1	$k'^{1/2}$	k'	$k'^{1/2}$
$\frac{1}{2}iK'$	$(1+k)^{1/2}$	$(\frac{1}{2}k')^{1/2}[(1+k')^{1/2}-i(1-k')^{1/2}]$	$(1-k)^{1/2}$	$(\frac{1}{2}k')^{1/2}[(1+k')^{1/2}+i(1-k')^{1/2}]$
iK'	∞	$-ik'^{1/2}$	0	$ik'^{1/2}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-(1+k)^{1/2}$	$-(\frac{1}{2}k')^{1/2}[(1+k')^{1/2}+i(1-k')^{1/2}]$	$-(1-k)^{1/2}$	$-(\frac{1}{2}k')^{1/2}[(1+k')^{1/2}-i(1-k')^{1/2}]$

当有二个符号出現时，則上面的符号对应于 $m\boldsymbol{K}+ni\,\boldsymbol{K}'+u$，下面的符号对应于 $m\boldsymbol{K}+ni\,\boldsymbol{K}'-u$.

在 e_1, e_2, e_3 为已知时，雅可比椭圆函数可用以計算韋尔司特拉斯函数. 雅可比函数的模，以及雅可比函数的变量見 13-16 (7)，韋尔司特拉斯函数的周期可从 13-16 (9) 式求得，量 η 及 η' 則可从 13-16 (10)求得. 韋尔司特拉斯基礎函数为

$$(22)\qquad \wp(z)=e_3+\frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2(u,k)},$$

三个数 e_α 常可以在 $|k|\leqslant 1$ 的条件下取定.

表 7　用四分之一及半周期所作的变量变换，对称性

$\mathrm{sn}\,(mK+ni\,K'\pm u)$

mK \ $ni\,K'$	$-K$	0	K	$2K$	$3K$
$-iK'$	$-d/(kc)$	$\pm 1/(ks)$	$d/(kc)$	$\mp 1/(ks)$	$-d/(kc)$
0	$-c/d$	$\pm s$	c/d	$\mp s$	$-c/d$
iK'	$-d/(kc)$	$\pm 1/(ks)$	$d/(kc)$	$\mp 1/(ks)$	$-d/(kc)$
$2iK'$	$-c/d$	$\pm s$	c/d	$\mp s$	$-c/d$

$\mathrm{cn}\,(mK+ni\,K'\pm u)$

mK \ $ni\,K'$	$-K$	0	K	$2K$	$3K$
$-iK'$	$-ik'/(kc)$	$\pm id/(ks)$	$ik'/(kc)$	$\mp id/(ks)$	$-ik'/(kc)$
0	$\pm k's/d$	c	$\mp k's/d$	$-c$	$\pm k's/d$
iK'	ik'/kc	$\mp id/(ks)$	$-ik'/(kc)$	$\pm id/(ks)$	$ik'/(kc)$
$2iK'$	$\mp k's/d$	$-c$	$\pm k's/d$	c	$\mp k's/d$

$\mathrm{dn}\,(mK+ni\,K'\pm u)$

mK \ $ni\,K'$	$-K$	0	K	$2K$
$-iK'$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$
0	k'/d	d	k'/d	d
iK'	$\pm ik's/c$	$\mp ic/s$	$\pm ik's/c$	$\mp ic/s$
$2iK'$	$-k'/d$	$-d$	$-k'/d$	$-d$
$3iK'$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$

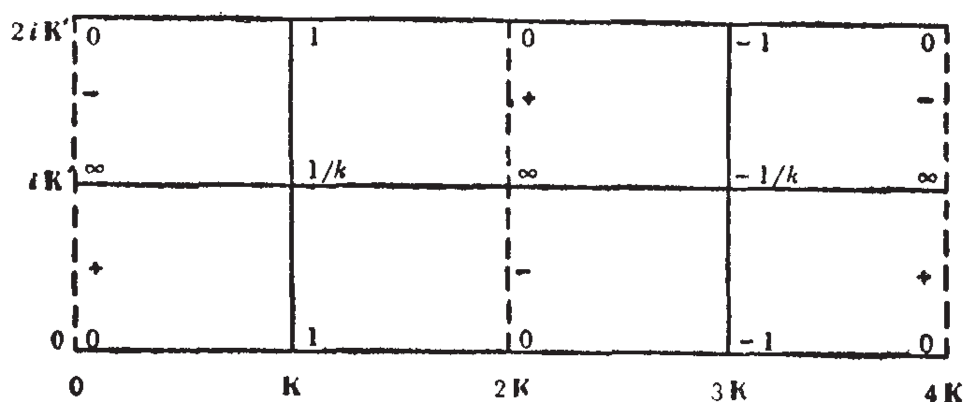
13-18.　雅可比椭圆函数的摹绘性質及退化情形

在很多应用中 $0<k<1$. 在这种情形下，又有 $0<k'<1$，而从 13-8 (1)可知 K 及 K' 都是实数. 点網 $mK+ni\,K'$ 可用矩形格子

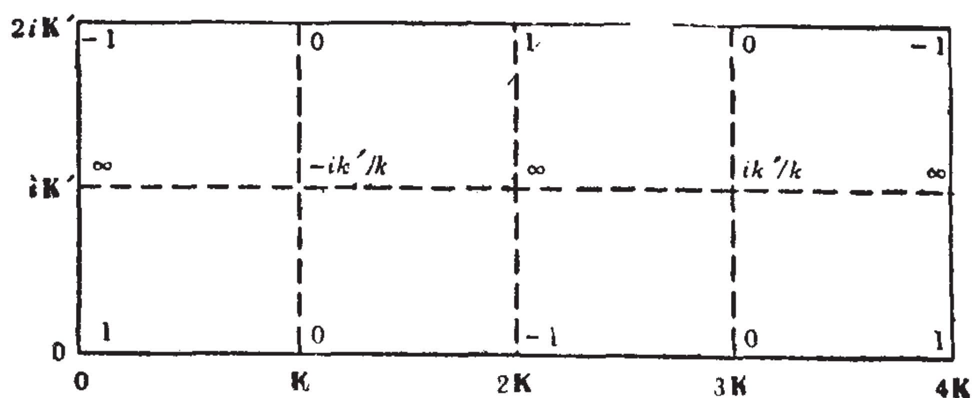
來生成(虽然矩形格子幷不需要与原始周期对应). 我們將把这种情形下的 sn u, cn u, dn u 的性态用圖來表示(下圖). 圖形外面的記号表示格網点 $mK+niK'$ 的位置, 圖形內部的記号是所論函数在網格点上的値. 在实綫上函数是实数, 在任何二个相鄰的網格点之間它是單調的. 在虛綫上函数是虛数, 在任何二相鄰的網格点之間它是單調的. 在一个函数的一个零点及一个極点的連綫上, 虛部的符号不能很明顯地从圖形上看出, 將以 $-$ 或 $+$ 号标出.

从这些圖上可以看出, 所有三个函数在綫 $\operatorname{Im} u=2nK'$ 上都是实数而且是周期函数. 函数 sn 及 cn 的周期为 $4K$, 振动于 1 与 -1 之間; 函数 dn 的周期为 $2K$, 在对应于偶数 n 的綫上, 振动于 1 及 k' 之間, 而在对应于奇数 n 的綫上, 則振动于 -1 及 $-k'$ 之間.

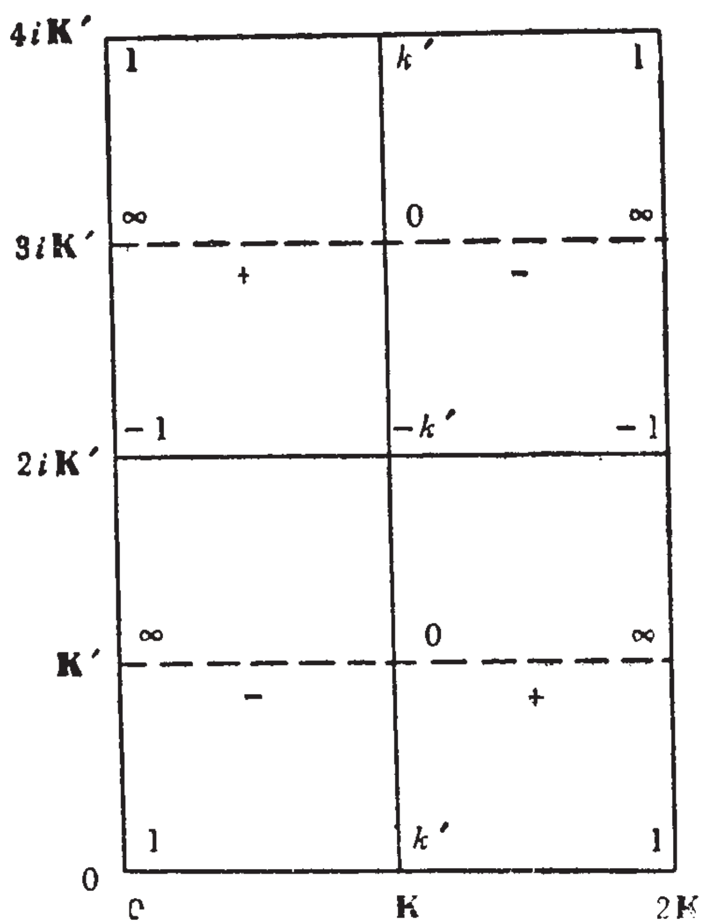
这些圖也可用以确定任一矩形中雅可比函数的实部和虛部的



sn u, $0\leqslant \operatorname{Re} u\leqslant 4K$, $0\leqslant \operatorname{Im} u\leqslant 2K'$



cn u, $0\leqslant \operatorname{Re} u\leqslant 4K$, $0\leqslant \operatorname{Im} u\leqslant 2K'$



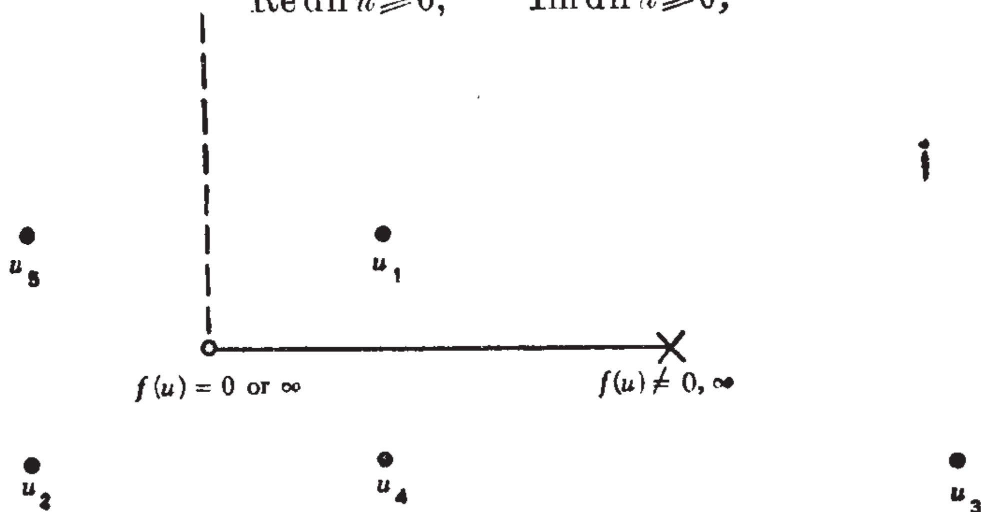
dn u, $0\leqslant \mathrm{Re}\, u\leqslant 2K$, $0\leqslant \mathrm{Im}\, u\leqslant 4K'$

符号. 例如,取矩形的頂点为 $K, 2K, 2K+iK', K+iK'$, 从圖可知在这一矩形的边界上

$$\mathrm{Re\,sn}\,u\geqslant 0,\qquad \mathrm{Im\,sn}\,u\leqslant 0;$$

$$\mathrm{Re\,cn}\,u\leqslant 0,\qquad \mathrm{Im\,cn}\,u\leqslant 0;$$

$$\mathrm{Re\,dn}\,u\geqslant 0,\qquad \mathrm{Im\,dn}\,u\geqslant 0;$$



而根据保形映射理論可知，这些不等式对于矩形的內部也成立.

雅可比橢圓函数的对称性

雅可比函数的对称性也可用圖表出. 設 u_1 及 u_2 关于雅可比函数 $f(u)$ 的一个零点或極点对称，u_1 及 u_3 关于一个既不是零点也不是極点的網格点对称，u_1 及 u_4 关于一条 $f(u)$ 为实数的綫对称，u_1 及 u_5 关于一条 $f(u)$ 为虛数的綫对称. 則

$$f(u_1)=-f(u_2)=f(u_3)=\overline{f(u_4)}=-\overline{f(u_5)}.$$

又

$$|\operatorname{sn} u|=k^{-1/2} \qquad \operatorname{Im} u=(n+\tfrac{1}{2})K', \tag{1}$$

$$|\operatorname{dn} u|=k'^{1/2} \qquad \operatorname{Re} u=(n+\tfrac{1}{2})K. \tag{2}$$

轉过 90° 后，可將 $\operatorname{sn} u$ 的圖在本質上变为 $\operatorname{dn} u$ 的圖；但轉过 90° 后，并不能在本質上改变 $\operatorname{cn} u$ 的圖.

关于雅可比橢圓函数在 $0<k<1$ 情形下的更詳細討論，可参看 Jahnke-Emde (1938, p. 92, 93).

在雅可比橢圓函数的一个或二个周期变为無窮大，卽 $k^2=0, 1$ 或不定(后一个情形是最平凡的情形)时卽出現了这一函数的**退化情形**. 像在韋尔司特拉斯函数的情形(13-15 節)一样，可分三种情况:

(i) 实周期是無窮大

$$k=1,\ k'=0,\ K=\infty,\ K'=\frac{1}{2}\pi, \tag{3}$$

$$\operatorname{sn}(u,1)=\tanh u,\ \operatorname{cn}(u,1)=\operatorname{dn}(u,1)=\operatorname{sech} u. \tag{4}$$

(ii) 虛周期是無窮大

$$k=0,\ k'=1,\ K=\tfrac{1}{2}\pi,\ K'=\infty. \tag{5}$$

$$\operatorname{sn}(u,0)=\sin u,\ \operatorname{cn}(u,0)=\cos u,\ \operatorname{dn}(u,0)=1. \tag{6}$$

(iii) 二个周期都是無窮大

$$K=K'=\infty,\ \operatorname{sn} u=0,\ \operatorname{cn} u=\operatorname{dn} u=1. \tag{7}$$

13-19. θ函数

虽然与 θ 函数密切相关的函数是由欧拉、Jakob 柏努利和富里哀所發現，但是它們的系統研究以及把它們發展为椭圓函数的理論則是雅可比的功績．雅可比的 θ 函数相当于韋尔司特拉斯理論中的 σ 函数．就像 σ 函数一样，θ 函数都是整函数，因此肯定不是双周期函数．不过它在一个周期的平移下，还具有一种簡單的性态．θ 函数比之 σ 函数更为标准化．它是單周期的，它可以用收斂得特別快的級数來代表，在椭圓函数的数值計算中，它也是最好的工具．

在韋尔司特拉斯函数中，变量为 z，半周期为 ω,ω'，令 $\tau=\omega'/\omega$，并設 $\operatorname{Im}\tau>0$．雅可比函数則用 u 及四分之一周期 $\mathbf{K},\mathbf{K}'$ 來表示，这里

(1) $$u=(e_1-e_3)^{1/2}z,\ \mathbf{K}=(e_1-e_3)^{1/2}\omega,\ i\mathbf{K}'=(e_1-e_3)^{1/2}\omega'.$$

至于 θ 函数，它的变量是

(2) $$v=\frac{z}{2\omega}=\frac{u}{2\mathbf{K}},$$

参数为

(3) $$\tau=\frac{\omega'}{\omega}=i\frac{\mathbf{K}'}{\mathbf{K}},\qquad \operatorname{Im}\tau>0,$$

或为

(4) $$q=e^{i\pi\tau}=e^{i\pi\omega'/\omega}=\exp(-\pi\mathbf{K}'/\mathbf{K})\qquad |q|<1.$$

半周期为 $1,\tau$．应用 13-10 (8)，我們总可以使

(5) $$|q|<\exp(-\tfrac{1}{2}\pi\cdot 3^{1/2}),$$

但在下面我們对原始周期的这样一个选擇將不采用．

四个 θ 函数的定义为

(6) $$\theta_1(v)=\theta_1(v,q)=\theta_1(v|\tau)$$
$$=2q^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\sin[(2n+1)\pi v].$$

(7) $\theta_2(v)=\theta_2(v,q)=\theta_2(v|\tau)$

$$=2q^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}\cos[(2n+1)\pi v].$$

(8) $\theta_3(v)=\theta_3(v,q)=\theta_3(v|\tau)$

$$=1+2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2}\cos(2n\pi v).$$

(9) $\theta_4(v)=\theta_4(v,q)=\theta_4(v|\tau)$

$$=1+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos(2n\pi v).$$

最后一个函数有时簡記为 $\theta_0(v)$ 或 $\theta(v)$. 这些函数对于所有的 v(复数)及所有滿足(4)的 q 都收斂. 由于因子 q^{n^2}, 故有良好的收斂性. 上面四个級数又可寫成

(10) $$\theta_1(v)=i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1/2)^2}e^{i\pi(2n-1)v},$$

(11) $$\theta_2(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(n-1/2)^2}\exp[i\pi(2n-1)v],$$

(12) $$\theta_3(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}\exp[i\pi 2nv],$$

(13) $$\theta_4(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\exp(i\pi 2nv).$$

这是以 $\exp(i\pi v)$ 为变量的劳倫特展开式,对于这一变量的有限非零值都收斂.

所有四个 θ 函数都是 v 的整函数,而且都是周期函数, θ_1 及 θ_2 的周期是 2, θ_3 及 θ_4 的周期为 1. 它們在加上半周期及四分之一周期后的性态如表 8 所示,其中应用簡号

(14) $A(v)=e^{-i\pi(2v+\tau)}$, $B(v)=e^{-i\pi(v+1/4\tau)}$.

表 8 也表明了四个 θ 函数的字称.

表 8 表明所有四个 θ 函数都可从任一函数上加四分之一周期而得. 从表知 θ_1 在 $v=0$ 处具有一零点, 因此在 $m+n\tau$ 上具有零点,这里 m, n 都是整数. 可以証明(將 θ_1'/θ_1 在以 $\pm 1/2\pm 1/2\tau$

表 8 用四分之一及半周期所作的变量变换．对称性

$\theta(v)$	$\theta(-v)$	$\theta(v+1)$	$\theta(v+\tau)$	$\theta(v+1+\tau)$	$\theta(v+\frac{1}{2})$	$\theta(v+\frac{1}{2}\tau)$	$\theta(v+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau)$
$\theta_1(v)$	$-\theta_1(v)$	$-\theta_1(v)$	$-A(v)\theta_1(v)$	$A(v)\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$iB(v)\theta_4(v)$	$B(v)\theta_3(v)$
$\theta_2(v)$	$\theta_2(v)$	$-\theta_2(v)$	$A(v)\theta_2(v)$	$-A(v)\theta_2(v)$	$-\theta_1(v)$	$B(v)\theta_3(v)$	$-iB(v)\theta_4(v)$
$\theta_3(v)$	$\theta_3(v)$	$\theta_3(v)$	$A(v)\theta_3(v)$	$A(v)\theta_3(v)$	$\theta_4(v)$	$B(v)\theta_2(v)$	$iB(v)\theta_1(v)$
$\theta_4(v)$	$\theta_4(v)$	$\theta_4(v)$	$-A(v)\theta_4(v)$	$-A(v)\theta_4(v)$	$\theta_3(v)$	$iB(v)\theta_1(v)$	$B(v)\theta_2(v)$

为頂点的平行四边形边界上積分）这些零点將是 θ_1 唯有的零点；因此表 8 可用以确定其他三个 θ 函数的零点．在表 9 中，m,n 代表整数．

表 9　θ 函数的零点

$\theta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$\theta_4(\theta)$
零　点	$m+n\tau$	$m+\frac{1}{2}+n\tau$	$m+\frac{1}{2}+(n+\frac{1}{2})\tau$	$m+(n+\frac{1}{2})\tau$

从零点的知識中就可以求出表示 θ 函数的無窮乘積，而从这些乘積就可求得 $\ln\theta(v)$ 及 $\theta'(v)/\theta(v)$ 的部分分式展开式．从(17)式还可得(19)式，在無窮乘積中，我們用記法

$$q_0=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}). \tag{15}$$

于是

$$\theta_1(v)=2q_0q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}), \tag{16}$$

$$\theta_2(v)=2q_0q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}),$$

$$\theta_3(v)=q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}),$$

$$\theta_4(v)=q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}).$$

$$\ln\left[\pi\frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(v)}\right]=\ln(\sin\pi v)+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\,\frac{\sin^2 m\pi v}{m}, \tag{17}$$

$$\ln\left[\pi\frac{\theta_2(v)}{\theta_2(0)}\right]=\ln(\cos\pi v)+4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\,\frac{\sin^2 m\pi v}{m},$$

$$\ln\left[\frac{\theta_3(v)}{\theta_3(0)}\right]=4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{q^m}{1-q^{2m}}\,\frac{\sin^2 m\pi v}{m},$$

$$\ln\left[\frac{\theta_4(v)}{\theta_4(0)}\right]=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\,\frac{\sin^2 m\pi v}{m},$$

$$\frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)}=\pi\operatorname{ctn}\pi v+4\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v, \tag{18}$$

$$\frac{\theta_2'(v)}{\theta_2(v)} = -\pi \tan \pi v + 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi v,$$

$$\frac{\theta_3'(v)}{\theta_3(v)} = 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi v,$$

$$\frac{\theta_4'(v)}{\theta_4(v)} = 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi v.$$

$$(19)\quad \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_1(v+w)}{\theta_1(v-w)}\right] = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\sin\pi(v+w)}{\sin\pi(v-w)}\right] + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi w,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_2(v+w)}{\theta_2(v-w)}\right] = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\cos\pi(v+w)}{\cos\pi(v-w)}\right] + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi w.$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_3(v+w)}{\theta_3(v-w)}\right] = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi w.$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_4(v+w)}{\theta_4(v-w)}\right] = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi w.$$

方程(16)在整个 v 平面上正确. 在(17)及(18)中,有关 θ_1 及 θ_2 的公式在带 $|\mathrm{Im}\, v| < \mathrm{Im}\,\tau$ 上正确,有关 θ_3 及 θ_4 的公式则在带 $|\mathrm{Im}\, v| < \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,\tau$ 上正确. 在(19)式中,前二式在 $|\mathrm{Im}\, v| + |\mathrm{Im}\, w| < \mathrm{Im}\,\tau$ 时正确, 而后二式则在 $|\mathrm{Im}\, v| + |\mathrm{Im}\, w| < \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,\tau$ 时正确. 从(18)式可得

$$(20)\quad \frac{\theta_\alpha'(v+m+n\tau)}{\theta_\alpha(v+m+n\tau)} = \frac{\theta_\alpha'(v)}{\theta_\alpha(v)} - 2n\pi i,$$

$$\alpha = 1, 2, 3, 4;\ m, n \text{ 整数}.$$

同一变量的各 θ 函数的平方之間有着下列关系:

$$(21)\quad \begin{aligned} \theta_1^2(v)\theta_2^2(0) &= \theta_4^2(v)\theta_3^2(0) - \theta_3^2(v)\theta_4^2(0), \\ \theta_1^2(v)\theta_3^2(0) &= \theta_4^2(v)\theta_2^2(0) - \theta_2^2(v)\theta_4^2(0), \\ \theta_1^2(v)\theta_4^2(0) &= \theta_3^2(v)\theta_2^2(0) - \theta_2^2(v)\theta_3^2(0), \\ \theta_4^2(v)\theta_4^2(0) &= \theta_3^2(v)\theta_3^2(0) - \theta_2^2(v)\theta_2^2(0). \end{aligned}$$

上面各个公式可以这样來証明:等式二边的比是一个沒有零点或極点的双周期函数(周期为 1 及 τ),因此是一常数,再应用 v 的特殊值(半周期)來算出这一常数卽可得上述四式的証明.

方程(21)是 θ 函数加法定理的特殊情形,这一定理把

$$\theta_\alpha(v+w)\theta_\alpha(v-w)\theta_4^2(0),$$

表为 v 及 w 的 θ 函数的平方(見 Whittaker 及 Watson, 1927, p 487).

"自变数为零的 θ 函数"

$$\theta_1'(0),\ \theta_2(0),\ \theta_3(0),\ \theta_4(0)$$

有着特別重要的意义(見 13-20 節). 它們滿足几个恆等式,其中最重要的有

$$(22)\quad \theta_1'(0) = \pi\,\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0),$$

$$(23)\quad \theta_2^4(0) + \theta_4^4(0) = \theta_3^4(0).$$

說明自变量为零的 θ 函数性态的圖以及 v 为实数时 $\theta_\alpha(v|0.1)$ 的性态的描摹性質及圖象,可参看 Tricomi 的著作(1937, p. 137-140).

θ 函数出現在热傳導理論及类似的边値問題中,它的出現是独立的,不与椭圓函数的理論相关. 从(10)至(13)式可以看出,函数 $\theta_\alpha(\tfrac{1}{2}x|i\pi t)$, $\alpha=1, 2, 3, 4$ 滿足偏微分方程

$$(24)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

在这一方面値得注意的就是 θ 函数有相当簡單的拉普拉斯变換.

θ 函数的商也滿足非綫性的一階微分方程(变量为 v). 这些方程可以很容易地从椭圓函数及 θ 商之間的关系(見 13-20 節)中導

出.

漢米特曾研究了下列函数

(25) $$\Theta_{\mu,\nu}(v\,|\,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\pi\tau(n+\tfrac{1}{2}\mu)^2+2i\pi v(n+\tfrac{1}{2}\mu)+i\pi n\nu\right]$$

(見 Hurwitz 及 Courant, 1925, p 198–201). 雅可比的四个 θ 函数都是漢米特函数的特例.

13–20. 用 θ 函数表示的橢圓函数及橢圓積分的表达式. 反演問題

θ 函数与韋尔司特拉斯 σ 函数是密切相关的,因此可用 θ 函数來表示韋尔司特拉斯函数. 雅可比函数已經用韋尔司特拉斯函数來表示,因此,現在也可用 θ 函数來表示. 最后, θ 函数也可用以表示第三类完全和不完全橢圓積分. 下面,在韋尔司特拉斯函数中我們將用变量 z, 雅可比橢圓函数的变量为 u, θ 函数的变量为 v. 它們之間的关系見 13–19 (2). 周期的各种記法及其他量之間的关系,見方程 13–19 (1) 至 (4).

韋尔司特拉斯函数

(1) $$\sigma(z)=2\,\omega\exp\left(\frac{\eta z^2}{2\omega}\right)\frac{\theta_1(v)}{\theta_1'(0)},$$

(2) $$\sigma_\alpha(z)=\exp\left(\frac{\eta z^2}{2\omega}\right)\frac{\theta_{\alpha+1}(v)}{\theta_{\alpha+1}(0)} \qquad \alpha=1, 2, 3.$$

(3) $$\zeta(z)=\frac{\eta}{\omega}z+\frac{1}{2\omega}\,\frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)}.$$

(4) $$\wp(z)=e_\alpha+\frac{1}{4\omega^2}\left[\frac{\theta_1'(0)}{\theta_{\alpha+1}(0)}\,\frac{\theta_{\alpha+1}(v)}{\theta_1(v)}\right]^2, \qquad \alpha=1, 2, 3.$$

(5) $$\wp'(z)=-\frac{1}{4\omega^3}\,\frac{\theta_2(v)\theta_3(v)\theta_4(v)\theta_1'^3(0)}{\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)\,\theta_1^3(v)},$$

(6) $$12\,\omega^2 e_1=\pi^2\left[\theta_3^4(0)+\theta_4^4(0)\right],$$

$$12\,\omega^2 e_2 = \pi^2[\theta_3^4(0) - \theta_4^4(0)],$$

$$12\,\omega^2 e_3 = -\pi^2[\theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)].$$

(7) $$(e_2 - e_3)^{1/2} = i(e_3 - e_2)^{1/2} = \frac{\pi}{2\omega}\theta_2^2(0),$$

$$(e_1 - e_3)^{1/2} = i(e_3 - e_1)^{1/2} = \frac{\pi}{2\omega}\theta_3^2(0),$$

$$(e_1 - e_2)^{1/2} = i(e_2 - e_1)^{1/2} = \frac{\pi}{2\omega}\theta_4^2(0).$$

(8) $$g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4[\theta_2^8(0) + \theta_3^8(0) + \theta_4^8(0)],$$

$$g_3 = \frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6[\theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)][\theta_3^4(0) + \theta_4^4(0)][\theta_4^4(0) - \theta_2^4(0)].$$

(9) $$\Delta^{1/4} = \frac{\pi}{4\omega^3}\theta_1'^2(0) = \frac{\pi^3}{4\omega^3}[\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)]^2,$$

(10) $$\eta = -\frac{1}{12\omega}\frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)},\quad \eta' = -\frac{\pi i}{2\omega} - \frac{\tau}{12\omega}\frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)}.$$

方程(1)二边的函数的商是一个沒有極点或零点的双周期函数,在 v 及 z 趋向于 0 时趋于 1, 这就証明了(1). 方程(2)可从 13–12 (22) 式及 13–19 節的表 8 推出. 方程(3)可从(1)式的对数微分中得出,(4)可从(2)及 13–13 (22)得出,(5)从(4)及 13–13 (21)式得出,(6)及(7)从 13–13 (23)式,(8)从 12–13 (5)及(6)式,(9)从 13–13 (7)式,(10)从(1)及(3)式推出. 所有的韋尔司特拉斯函数都可用周期 2ω, $2\omega'$ 及变量 z 作出. θ 函数中的变量 v 及 q, 見 13–19 (2)及(4)式.

雅可比橢圓函数. 应用方程(1)至(10), 从 13–16 節的公式中可得出下列关系式:

(11) $k^{1/2} = \theta_2(0)/\theta_3(0)$, $k'^{1/2} = \theta_4(0)/\theta_3(0)$,

(12) $\mathbf{K}^{1/2} = (\tfrac{1}{2}\pi)^{1/2}\theta_3(0)$, $\mathbf{K}'^{1/2} = (-\tfrac{1}{2}\tau i)^{1/2}\theta_3(0)$,

(13) $\operatorname{sn} u=\dfrac{\theta_3(0)\theta_1(v)}{\theta_2(0)\theta_4(v)},\quad \operatorname{cn} u=\dfrac{\theta_4(0)\theta_2(v)}{\theta_2(0)\theta_4(v)},$

$$\operatorname{dn} u=\frac{\theta_4(0)\theta_3(v)}{\theta_3(0)\theta_4(v)},\quad Z(u)=E(u)-\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}u=\frac{1}{2\mathbf{K}}\frac{\theta_4'(v)}{\theta_4(v)}.$$

在 τ 为已知时，方程(11)可用以确定雅可比橢圓函数的模，(12)可确定四分之一周期，而(13)則可用以确定函数本身．在橢圓函数的許多应用中，通常 k^2 都是給定的，問題是是否永远存在有一个数 q，使 $|q|<1$，且

(14) $k^2=\dfrac{\theta_2^4(0,q)}{\theta_3^4(0,q)}=1-\dfrac{\theta_4^4(0,q)}{\theta_3^4(0,q)},$

这叫做反演問題．在許多实际应用中，$0<k^2<1$．在这种情形下，根据 13-19 (16)式來考察

$$\frac{\theta_4^4(0,q)}{\theta_3^4(0,q)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n+1}}.$$

当 q 从 0 通过实数值增至 1 的时候，無窮乘積从 1 單調减至 0，因此(14)恰具有一个解 q，介于 $0<q<1$．至于 k^2 的其他数值的討論就非常困难（例如可参看 Whittaker 及 Watson, 1927, p. 480–483)，并包含 q 的复数值．对于給定的 $k^2\neq 0, 1$，雅可比橢圓函数的唯一系統的証明可以橢圓模函数的理論作为根据．

橢圓積分　寫成勒上特典范形式 13-6 (1)-(3)的基礎橢圓積分，可用 θ 函数來計算．我們先作出模为 k 的雅可比橢圓函数，确定四分之一周期 $\mathbf{K}$ 及 $\mathbf{K}'$，并命

(15) $v=\dfrac{F(\phi,k)}{2\mathbf{K}},\quad q=\exp(-\pi\mathbf{K}'/\mathbf{K})$

为 θ 函数的变量及参数．于是从(13)可得

(16) $E(\phi,k)=\dfrac{1}{2\mathbf{K}}\dfrac{\theta_4'(v)}{\theta_4(v)}+2\mathbf{E}v.$

第三类橢圓積分的計算較为困难．我們將給出 ϕ,ν 为实数、$0<k<1$ 的結果，把 ν 用一輔助实参数 γ 表示，根据(15)，不同的

表达式將在区間$(-\infty, -1)$, $(-1, -k^2)$, $(-k^2, 0)$, $(0, \infty)$上正确,幷令

$$\beta=\frac{\gamma}{2\boldsymbol{K}}. \tag{17}$$

于是有(見 Tricomi, 1937, p 153–158),

$$\frac{\operatorname{cn}(\gamma, k)\operatorname{dn}(\gamma, k)}{\operatorname{sn}(\gamma, k)}\Pi\left[\phi, -\frac{1}{\operatorname{sn}^2(\gamma, k)}, k\right] \tag{18}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_1(v+\beta)}{\theta_1(v-\beta)}\right]-\frac{\theta_4'(\beta)}{\theta_4(\beta)}v, \qquad 0<\gamma<\boldsymbol{K},\ |v|>\beta,$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_1(\beta+v)}{\theta_1(\beta-v)}\right]-\frac{\theta_4'(\beta)}{\theta_4(\beta)}v, \qquad 0<\gamma<\boldsymbol{K},\ |v|<\beta.$$

$$k'^2\frac{\operatorname{sn}(\gamma, k')\operatorname{cn}(\gamma, k')}{\operatorname{dn}(\gamma, k')}\Pi\left[\phi, -\operatorname{dn}^2(\gamma, k'), k\right] \tag{19}$$

$$=-\frac{1}{2i}\ln\left[\frac{\theta_2(v+i\beta)}{\theta_2(v-i\beta)}\right]-i\frac{\theta_3'(i\beta)}{\theta_2(i\beta)}v \qquad 0<\gamma<\boldsymbol{K}'.$$

$$\frac{\operatorname{cn}(\gamma, k)\operatorname{dn}(\gamma, k)}{\operatorname{sn}(\gamma, k)}\Pi\left[\phi, -k^2\operatorname{sn}^2(\gamma, k), k\right]. \tag{20}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\theta_4(v+\beta)}{\theta_4(v-\beta)}\right]+\frac{\theta_1'(\beta)}{\theta_1(\beta)}v \qquad 0<\gamma<\boldsymbol{K}.$$

$$\frac{\operatorname{dn}(\gamma, k')}{\operatorname{sn}(\gamma, k')\operatorname{cn}(\gamma, k')}\Pi\left[\phi, k^2\frac{\operatorname{sn}^2(\gamma, k')}{\operatorname{cn}^2(\gamma, k')}, k\right] \tag{21}$$

$$=\frac{1}{2i}\ln\left[\frac{\theta_4(v+i\beta)}{\theta_4(v-i\beta)}\right]+i\frac{\theta_1'(i\beta)}{\theta_1(i\beta)}v, \qquad 0<\gamma<\boldsymbol{K}'.$$

所有这些公式中的对数均取主値. 在(18)及(20)式中,它們是实数,而在(19)及(21)式中, $-\pi\leqslant\operatorname{Im}\ln[\cdots]\leqslant\pi$. (19)及(21)式的右边是实数. 从 13–19 (18)及(19)式可得

$$i\frac{\theta_1'(i\beta)}{\theta_1(i\beta)}=\pi\operatorname{ctnh}\pi\beta-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\operatorname{sh}2n\pi\beta. \tag{22}$$

$$i\frac{\theta_3'(i\beta)}{\theta_2(i\beta)}=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q^n}{1-q^{2n}}\operatorname{sh}2n\pi\beta. \tag{23}$$

$$(24)\quad \frac{1}{2i}\ln\left[\frac{\theta_2(v+i\beta)}{\theta_2(v-i\beta)}\right]=-\tan^{-1}(\tanh\pi\beta\cdot\tan\pi v)$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin 2n\pi v\cdot\operatorname{sh}2n\pi\beta.$$

$$(25)\quad \frac{1}{2i}\ln\left[\frac{\theta_4(v+i\beta)}{\theta_4(v-i\beta)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin 2n\pi v,\cdot\operatorname{sh}2n\pi\beta.$$

(23)及(25)中的無窮級数收斂得并不像希望的那样快. 在 q 不是很小时,計算(19)及(21)式的右边部分时可应用公式:

$$(26)\quad \theta_4(v\pm i\beta)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos(2n\pi v)\operatorname{ch}(2n\pi\beta)$$

$$\pm i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{n^2}\sin(2n\pi v)\operatorname{sh}(2n\pi\beta).$$

$$(27)\quad \theta_3(i\beta)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\operatorname{ch}(2n\pi\beta).$$

$$(28)\quad i\theta_3'(i\beta)=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n^2}\operatorname{sh}(2n\pi\beta).$$

这些展开式以及应用在这样的計算中的其他展开式,可从 13–19 (6)至(9)中推出.

第一类完全椭圓積分已經以 θ 函数表示,如(12). 至于第二类完全椭圓積分,从(6), (7), (10)及 13–16 (10)式可得

$$(29)\quad E=\frac{\theta_3^4(0)+\theta_4^4(0)}{3\,\theta_3^4(0)}\mathbf{K}-\frac{1}{12\,\mathbf{K}}\frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)}.$$

第三类完全椭圓積分在前面的 13–8 (21) 至(24)中已化为第一及第二类椭圓積分,因此,它也可以用 θ 函数計算.

最后,应当說明,在应用 θ 函数來計算已知模 $k, 0<k<1$, 的雅可比椭圓函数或椭圓積分的时候, θ 函数的参数 q 可从下式計算:

$$(30)\quad q=\varepsilon+2\varepsilon^5+15\varepsilon^9+150\varepsilon^{13}+\cdots.$$

$$2\varepsilon=(1-k'^{1/2})(1+k'^{1/2}).$$

13-21. 椭圓函数的变換理論

椭圓函数变換理論所研究的是屬于不同对原始周期的椭圓函数之間的关系．由于任一个周期为 2ω, $2\omega'$ 的椭圓函数都可以用代数方法以 $\wp(z|\omega, \omega')$ 表示，因此，我們只須討論 $\wp$ 函数之間的关系就夠了．下面我們將永远設

(1) $\quad \operatorname{Im}(\omega'/\omega)>0, \operatorname{Im}(\dot{\omega}'/\dot{\omega})>0,$

并將簡略地列出一般变換理論的結果，至于这些結果的証明及詳細討論可参看本章末的参考文献．

我們說二个函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 是代数关联的，如果存在有一个二变量的多項式 $P(x, y)$，对于所有的 z，滿足条件 $P[f(z), g(z)]=0$.

函数 $\wp(u|\omega, \omega')$ 及 $\wp(u|\dot{\omega}, \dot{\omega}')$ 是代数关联的必要和充分条件是：存在有整数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho$，它們共同滿足条件：

(2) $\quad \rho\dot{\omega}=\alpha\omega+\beta\omega', \ \rho\dot{\omega}'=\gamma\omega+\delta\omega', \ D=\alpha\delta-\beta\gamma>0.$

在条件 (2) 已經給定的时候，函数 $\wp(u|\omega, \omega')$ 及 $\wp(u|\dot{\omega}, \dot{\omega}')$ 顯然都是周期为 $\rho\omega$, $\rho\omega'$ 的偶椭圓函数，因此它們是 $\wp(u|\rho\omega, \rho\omega')$ 的有理函数．这样，我們只要研究 $\rho=1$ 的代換式(2)就夠了，把它寫成矩陣形式，有

(3) $$\begin{bmatrix}\dot{\omega}\\ \dot{\omega}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ \omega'\end{bmatrix}, \quad D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}>0.$$

于是知函数

(4) $\quad x=\wp(z|\omega, \omega'), \ y=\wp(z|\dot{\omega}, \dot{\omega}')$

之間的关系具有如下的形式

(5) $\quad P(x, y)=0,$

这里 P 是 x 及 y 的多項式，是 x 的綫性式，是 y 的 D 次式（y 的次数可用極的計算來闡明）．我們將把 D 称为变換

(6) $$T=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

的次数或階数，并將像矩陣一样來作变換式的相乘：

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d\\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d\end{bmatrix}.$$

变換式(3)也可以看作是复数平面的上半平面映成它自身的馬別司变換

$$\dot{\tau}=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}. \tag{7}$$

所有的一階变換組成一个羣(模羣)．$\wp(u|\omega,\omega')=\wp(u|\dot{\omega},\dot{\omega}')$ 的必要和充分条件为 ω,ω' 及 $\dot{\omega},\dot{\omega}'$ 之間存在一个一階变換(單位模变換)．

模羣可由下列变換生成：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \tag{8}$$

也就是説，任一單位模变換是 A 及 B 的冪的相乘積．这样一來，对于一階变換的探討可以縮小为对于 A 及 B 的研究．

同样，对于二階变換的探討可縮小为对命頓变換．

$$L=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{9}$$

的研究，因为任一二階变換 S 都可以分解为 $S=HLK$，这里的 H 和 K 都是單位模变換．

13–22. 一階变換

經一階变換之后，所有各周期的点網 Ω (見 13–10 節)保持不变．由于韋尔司特拉斯函数 $\sigma(z)$, $\zeta(z)$, $\wp(z)$ 及不变式 g_2, g_3, $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ 只依賴于 Ω，故它們也不变．e_α 可有一个置換．从 13–12 (19) 及 13–13 (19)式有

$$\dot{\eta}=\zeta(\dot{\omega}|\dot{\omega},\dot{\omega}')=\zeta(\dot{\omega}|\omega,\omega')=\zeta(\alpha\omega+\beta\omega'|\omega,\omega')=\alpha\eta+\beta\eta',$$

$$\dot{\eta}'=\gamma\eta+\delta\eta',$$

因此 η, η' 与 ω, ω' 作相同的变换．函数 $\sigma_\alpha(z)$ 可有一个置换．簡單的計算表明，13-21 (8) 式中的 A 把 e_1, e_2, e_3 及 $\sigma_1(z), \sigma_2(z), \sigma_3(z)$ 的指标 2 及 3 互换，而 B 則把指标 1 及 3 互换．

雅可比橢圓函数在單位模变换下的性态是非常复什的．在 13-21 (6) 中如 α 及 δ 为奇整数，β 及 γ 为偶整数，則称 T 为 λ-变换．不难証明所有的 λ-变换組成模羣的一个子羣，我們把这一子羣称为 λ-羣．对于一个 λ-变换，有

$$\dot{e}_1 = \wp(\dot{\omega}|\dot{\omega}, \dot{\omega}') = \wp(\alpha\omega + \beta\omega'|\omega, \omega') = \wp(\omega) = e_1,$$

因为 $\beta\omega'$ 在 β 为偶数时是一周期，而 $\alpha\omega$ 与 ω 在 α 为奇数时相差一周期．同样有 $\dot{e}_2 = e_2$, $\dot{e}_3 = e_3$. 从 13-16 (4)-(6) 可知雅可比函数 sn, cn, dn 都是 λ-变换下的不变式．任何其他的單位模变换則將改变雅可比橢圓函数．

現在我們來考察下面的五个变换：

$$(1)\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

最后三式可用 A 及 B 來表示

$$(2)\qquad C = ABA, \quad D = ABAB, \quad E = BABA.$$

在表 10 中列出了 6 个变换 U (恆等变换)，$A, \cdots, E$ 以及这些变换下所引起的 e_α 的置换．表上列出了 e_1, e_2, e_3 的每一个置换．由于 e_α 的置换完全确定了雅可比橢圓函数的变换，故在求出雅可比橢圓函数的所有可能有的一階变换中，我們只要研究变换 (1) 就足夠了．

这一个表連同公式 13-16 (4), (5), (6), (9) 及 (11) 可導出表 11 中的全部变换公式．

橢圓積分的变换，見 13-7 節的表 3 及 13-8 節的表 4.

四个 θ 函数的变换可从下列表达式導出：

表 10 e_α 的置换

变 换	$\dot{\omega}$	$\dot{\omega}'$	$\dot{e}_1$	$\dot{e}_2$	$\dot{e}_3$
U	ω	ω'	e_1	e_2	e_3
A	ω	$\omega+\omega'$	e_1	e_3	e_2
B	ω'	$-\omega$	e_3	e_2	e_1
C	$\omega+\omega'$	ω'	e_2	e_1	e_3
D	$-\omega+\omega'$	$-\omega$	e_2	e_3	e_1
E	ω'	$-\omega-\omega'$	e_3	e_1	e_2

$$(3)\qquad \theta_1(v|\tau)=\frac{\omega^{1/2}\Delta^{1/8}}{\pi^{1/2}}\exp\left(-\frac{\eta z^2}{2\omega}\right)\sigma(z),$$

$$v=\frac{z}{2\omega},\quad \tau=\frac{\omega'}{\omega}.$$

这一式是根据 13–20 (1), (9) 及 13–19 (2), (3) 得出的. 我們已經知道,在一階变換 13–21 (6)的变換下,上式的右边部分將得怎样的結果,特别是,根据 13–12 (10),有

$$\frac{\eta}{\omega}-\frac{\dot{\eta}}{\dot{\omega}}=\frac{\eta}{\omega}-\frac{\alpha\eta+\beta\eta'}{\alpha\omega+\beta\omega'}=\frac{\beta(\eta\omega'-\eta'\omega)}{\omega\dot{\omega}}=\frac{\beta\pi i}{2\omega\dot{\omega}};$$

又

$$\dot{v}=\frac{z}{2\dot{\omega}}=\frac{z}{2(\alpha\omega+\beta\omega')}=\frac{v}{\alpha+\beta\tau},\qquad \dot{\tau}=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}.$$

由此从(3)式可知 $\theta_1(v|\tau)$ 的**一階变換的一般变換公式**为

$$(4)\qquad \theta_1\left(\frac{v}{\alpha+\beta\tau}\middle|\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)=\varepsilon(\alpha+\beta\tau)^{1/2}\exp\left(\frac{i\pi\beta v^2}{\alpha+\beta\tau}\right)\theta_1(v|\tau),$$

其中 $\varepsilon^8=1$. 因子 ε 說明了(3)式中的分数乘方的歧異,可以这样來确定:以 v 遍除(4)式,令 $v\to 0$ 而后比較二边的值,即可得 ε. 其他三个 θ 函数的变換,可从 13–19 節的表 8 中得出.

(1) 式的变換 A 及 B 生成模羣,它們的顯表示式如下:

变換 A

表 11　雅可比椭圓函数的一階变换

变　换	$\dot{\omega}$ $\dot{\omega}'$	$\dot{u}$	$\dot{k}$	$\dot{k}'$	$\dot{\boldsymbol{K}}$	$\dot{\boldsymbol{K}}'$	$\mathrm{sn}(\dot{u}, \dot{k})$	$\mathrm{cn}(\dot{u}, \dot{k})$	$\mathrm{dn}(\dot{u}, \dot{k})$
A	ω $\omega+\omega'$	$k'u$	$\frac{ik}{k'}$	$\frac{1}{k'}$	$k'\boldsymbol{K}$	$k'(\boldsymbol{K}'-i\boldsymbol{K})$	$k'\frac{\mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)}$	$\frac{\mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)}$	$\frac{1}{\mathrm{dn}(u,k)}$
B	ω' $-\omega$	$-iu$	k'	k	$\boldsymbol{K}'$	$\boldsymbol{K}$	$-i\frac{\mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)}$	$\frac{1}{\mathrm{cn}(u,k)}$	$\frac{\mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)}$
C	$\omega+\omega'$ ω'	ku	$\frac{1}{k}$	$\frac{k'}{ik}$	$k(\boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}')$	$k\boldsymbol{K}'$	$k\,\mathrm{sn}(u,k)$	$\mathrm{dn}(u,k)$	$\mathrm{cn}(u,k)$
D	$-\omega+\omega'$ $-\omega$	$-ik'u$	$\frac{1}{k'}$	$\frac{k}{ik'}$	$k'(\boldsymbol{K}'+i\boldsymbol{K})$	$k'\boldsymbol{K}$	$-ik'\frac{\mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)}$	$\frac{\mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)}$	$\frac{1}{\mathrm{cn}(u,k)}$
E	ω' $-(\omega+\omega')$	$-iku$	$\frac{k'}{ik}$	$\frac{1}{k}$	$k\boldsymbol{K}'$	$k(\boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}')$	$-ik\frac{\mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)}$	$\frac{1}{\mathrm{dn}(u,k)}$	$\frac{\mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)}$

(5) $\dot{v}=v,\ \dot{\tau}=1+\tau,\ \dot{q}=-q.$

(6) $\theta_1(v|\tau+1)=e^{\frac{1}{4}\pi i}\theta_1(v|\tau),\ \theta_2(v|\tau+1)=e^{\frac{1}{4}\pi i}\theta_2(v|\tau),$

$\theta_3(v|\tau+1)=\theta_4(v|\tau),\ \theta_4(v|\tau+1)=\theta_3(v|\tau).$

变换 B

(7) $\dot{v}=v/\tau,\ \dot{\tau}=-1/\tau,\ \ln\dot{q}=\pi^2/\ln q,$

(8) $$\theta_1\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)=-i(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\exp(i\pi v^2/\tau)\theta_1(v|\tau),$$

$$\theta_2\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\exp(i\pi v^2/\tau)\theta_4(v|\tau),$$

$$\theta_3\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\exp(i\pi v^2/\tau)\theta_3(v|\tau),$$

$$\theta_4\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\exp(i\pi v^2/\tau)\theta_2(v|\tau).$$

在这些公式中，$(-i\tau)^{\frac{1}{2}}$ 取主値(在右半平面上)．变换 B 称为**雅可比虚变换**.

变换 B 在 q 近于 1 或 τ 很小，当 $\theta_1(v|\tau)$ 的級数收斂得很慢，但 $\theta_1(v/\tau|-1/\tau)$ 的級数收斂得很快时可用以作 θ 函数的数値計算．特別是，当 $q\to1$ 时的漸近性态就可用这一方法來研究，有人得出了

(9) $\theta_2(0,q)\sim\theta_3(0,q)\sim(\pi/\ln q)^{\frac{1}{2}},\qquad q\to1.$

13-23. 二 階 变 換

从任一二階变換都是命頓变換

(1) $L=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$

及二个單位模变換的一个組合这一意义上看，可說主要的二階变換只有一个．在寫出各变換公式之前，应当注意下面的約定．凡是不指明周期的一切韋尔司特拉斯函数都按原始周期 ω,ω' 組成，所有的 e_α,η_α (上面沒有点)都从这些函数中導出.

命頓变换。韋尔司特拉斯函数.

(2) $\dot{\omega}=\frac{1}{2}\omega,\ \dot{\omega}'=\omega',$

(3) $\dot{e}_1=e_1+2(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}},$

$\dot{e}_2=e_1-2(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}},$

$\dot{e}_3=-2e_1.$

(4) $\dot{\eta}_1=\eta_1+\frac{1}{2}e_1\omega_1,\ \dot{\eta}_2=\eta_2-\eta_3+\frac{1}{2}e_1(\omega_1-\omega_3),$

$\dot{\eta}_3=2\eta_3+e_1\omega_3.$

(5) $\sigma(z\,|\,\frac{1}{2}\omega,\omega')=\exp(\frac{1}{2}e_1z^2)\sigma(z)\sigma_1(z),$

$\sigma_1(z\,|\,\frac{1}{2}\omega,\omega')=\exp(\frac{1}{2}e_1z^2)[\sigma_1^2(z)-(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}$
$\times(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}\sigma^2(z)],$

$\sigma_2(z\,|\,\frac{1}{2}\omega,\omega')$
$=\exp(\frac{1}{2}e_1z^2)[\sigma_1^2(z)+(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}\sigma^2(z)],$

$\sigma_3(z\,|\,\frac{1}{2}\omega,\omega')=\exp(\frac{1}{2}e_1z^2)\sigma_2(z)\sigma_3(z).$

(6) $\zeta(z\,|\,\frac{1}{2}\omega,\omega')=\zeta(z)+\zeta(z+\omega)+e_1z-\eta_1$

(7) $\wp(z\,|\,\frac{1}{2}\omega,\omega')=\wp(z)+\wp(z-\omega_1)-e_1$

$$=\wp(z)+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp(z)-e_1}.$$

由于韋尔司特拉斯函数的命頓变换包含 e_α, η_α, 它們在單位模变换下不是不变的，因此，我們再提出另外二个二階变换的基礎公式.

高斯变换　韋尔司特拉斯 $\wp$ 函数

(8) $G\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=-BLB,$

(9) $\wp(z\,|\,\omega,\frac{1}{2}\omega')=\wp(z)+\wp(z-\omega_3)-e_3$

$$=\wp(z)+\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\wp(z)-e_3}.$$

無理变换　韋尔司特拉斯 $\wp$ 函数

(10) $I=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}=-ABLABAB,$

(11) $\wp(z|\omega, \frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega')=\wp(z)+\wp(z-\omega_2)-e_2$

$$=\wp(z)-\frac{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}{\wp(z)-e_2}.$$

命頓变换．雅可比椭圆函数及 θ 函数．在 θ 函数中的参数不标出的时候，应理解为 τ.

(12) $\dot{u}=(1+k')u,\ \dot{k}=(1-k')/(1+k'),\ \dot{k}'=2k'^{1/2}/(1+k'),$

(13) $$\operatorname{sn}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right]=(1+k')\frac{\operatorname{sn}(u,k)\operatorname{cn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)},$$

$$\operatorname{cn}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)},$$

$$\operatorname{dn}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1-k')\operatorname{sn}^2(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)}.$$

(14) $\dot{v}=2v,\ \dot{\tau}=2\tau,\ \dot{q}=q^2,$

(15) $$\theta_1'(0|2\tau)=\frac{1}{2}\pi^{1/2}[\theta_2^3(0)\theta_1'(0)]^{1/4}$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{\theta_2(0)\theta_1'(0)}{[\theta_3(0)\theta_4(0)]^{1/2}},$$

$$\theta_2(0|2\tau)=2^{-1/2}[\theta_3^2(0)-\theta_4^2(0)]^{1/2},$$

$$\theta_3(0|2\tau)=2^{-1/2}[\theta_3^2(0)+\theta_4^2(0)]^{1/2},$$

$$\theta_4(0|2\tau)=[\theta_3(0)\theta_4(0)]^{1/2}.$$

(16) $$\theta_1(2v|2\tau)=\frac{\theta_1(v)\theta_2(v)}{\theta_4(0|2\tau)},$$

$$\theta_2(2v|2\tau)=\frac{\theta_2^2(v)-\theta_1^2(v)}{2\theta_3(0|2\tau)}=\frac{\theta_3^2(v)-\theta_4^2(v)}{2\theta_2(0|2\tau)},$$

$$\theta_3(2v|2\tau)=\frac{\theta_2^2(v)+\theta_1^2(v)}{2\theta_2(0|2\tau)}=\frac{\theta_3^2(v)+\theta_4^2(v)}{2\theta_3(0|2\tau)},$$

$$\theta_4(2v|2\tau)=\frac{\theta_3(v)\theta_4(v)}{\theta_4(0|2\tau)}.$$

高斯变换 雅可比椭圆函数

(17) $\dot{u}=(1+k)u,\ \dot{k}=2k^{1/2}/(1+k),\ \dot{k}'=(1-k)/(1+k).$

$$(18)\quad \operatorname{sn}\left[(1+k)\,u, \frac{2k^{1/2}}{1+k}\right]=(1+k)\frac{\operatorname{sn}(u,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u,k)},$$

$$\operatorname{cn}\left[(1+k)\,u, \frac{2k^{1/2}}{1+k}\right]=\frac{\operatorname{cn}(u,k)\operatorname{dn}(u,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u,k)},$$

$$\operatorname{dn}\left[(1+k)\,u, \frac{2k^{1/2}}{1+k}\right]=\frac{1-k\operatorname{sn}^2(u,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u,k)}.$$

高階的变换非常复什．这里我們只提出一个四階的变换 $(LB)^2$，由这一变换就可得出下面的 θ 函数的加倍公式，所有 θ 函数的参数都是 τ.

$$(19)\quad \theta_1(2v)=2\frac{\theta_1(v)\theta_2(v)\theta_3(v)\theta_4(v)}{\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)},$$

$$\theta_2(2v)=\frac{\theta_2^2(v)\theta_3^2(v)-\theta_1^2(v)\theta_4^2(v)}{\theta_2(0)\theta_3^2(0)},$$

$$\theta_3(2v)=\frac{\theta_2^2(v)\theta_3^2(v)+\theta_1^2(v)\theta_4^2(v)}{\theta_2^2(0)\theta_3(0)},$$

$$\theta_4(2v)=\frac{\theta_3^4(v)-\theta_2^4(v)}{\theta_4^3(0)}=\frac{\theta_4^4(v)-\theta_1^4(v)}{\theta_4^3(0)}.$$

13-24. 橢圓模函数

橢圓模函数 $f(\tau)$ 在 $\operatorname{Im}\tau>0$ 时是一个正則函数，極点除外，而且具有这样的一个性質，卽只要 τ 及 $\dot{\tau}$ 可以模羣的一个变换相联

$$(1)\quad \dot{\tau}=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},\qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta\text{ 均为整数},\ \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

則 $f(\tau)$ 及 $f(\dot{\tau})$ 之間必可以代数关系相联［注意，这里的 $\alpha,\cdots\gamma$ 已与 13-21 (7) 中不同］．如对于模羣的任一变换有 $f(\tau)=f(\dot{\tau})$，則称 $f(\tau)$ 为模羣的自守函数．

这样一个模函数的第一个例子就是雅可比橢圓函数的模的平方．从 13-16 (7) 及 13-20 (14) 得

(2)　$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{\theta_2^4(0\,|\,\tau)}{\theta_3^4(0\,|\,\tau)}=\lambda(\tau),$$

这一函数在 $\operatorname{Im}\tau>0$ 时是 τ 的解析函数，以实 τ 軸为自然边界．从 e_1, e_2, e_3 在 λ-变换下的不变性（α, δ 奇数，β, γ 偶数，見 13-22 節）可知 $\lambda(\tau)$ 是 λ-羣的自守函数．一般說來，模羣的一个变换將置換 e_α 因而把 $\lambda(\tau)$ 变为下面的六值之一：

(3)　$$\lambda(\tau),\ 1-\lambda(\tau),\ \frac{1}{\lambda(\tau)},\ \frac{1}{1-\lambda(\tau)},\ \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1},\ 1-\frac{1}{\lambda(\tau)},$$

由于所有这六个值都可与 $\lambda(\tau)$ 用代数关系相联，故知这一函数是一橢圓模函数．

从 13-12 (13) 式可知 g_2, g_3 及 $\Delta=g_2^3-27\,g_3^2$ 分別是 ω 及 ω' 的 $-4, -6, -12$ 次齐次函数，而絕对不变式

(4)　$$\frac{g_2^3}{\Delta}=\frac{g_2^3}{g_2^3-27\,g_3^2}=J(\tau)$$

是 τ 單独一数的函数，在上半平面上解析．經模羣的一个变換后，g_2 及 Δ 保持不变（見 13-22 節），这說明 $J(\tau)$ 是模羣的自守函数．應用 13-13 (6), (7) 及 13-16 (3) 可將 J 用 λ 來表示，而應用 13-20 (8), (9) 可將 J 用 θ 函数來表示：

(5)　$$J(\tau)=\frac{4}{27}\ \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

$$=\frac{1}{54}\ \frac{[\theta_2^8(0\,|\,\tau)+\theta_3^8(0\,|\,\tau)+\theta_4^8(0\,|\,\tau)]^3}{\theta_2^8(0\,|\,\tau)\theta_3^8(0\,|\,\tau)\theta_4^8(0\,|\,\tau)}.$$

如果复数 τ 平面的上半面中的二点 $\tau, \dot{\tau}$ 可以模羣的变換(1)相联，我們称这二点是等价的．模羣的基本域定义为

$$|\tau|\geqslant 1,\ \ |\tau+1|>|\tau|,\ \ |\tau-1|\geqslant|\tau|.$$

上半 τ 平面可以分成無数的域，每一个域以三段圓弧（其中一段或二段可退化成直綫段）圍成，而且每一域与基本域等价．事实上，上半平面中的每一点恰巧等价于基本域中的一个点．

給定模羣的一个自守函数以后，就完全可以研究这一函数在

基本域中的性态. 例如,可以証明 $J(\tau)$在基本域中恰好取每一个有限值一次,这說明对于 J 的每一有限值,恰巧有一章尔司特拉斯函数系統.

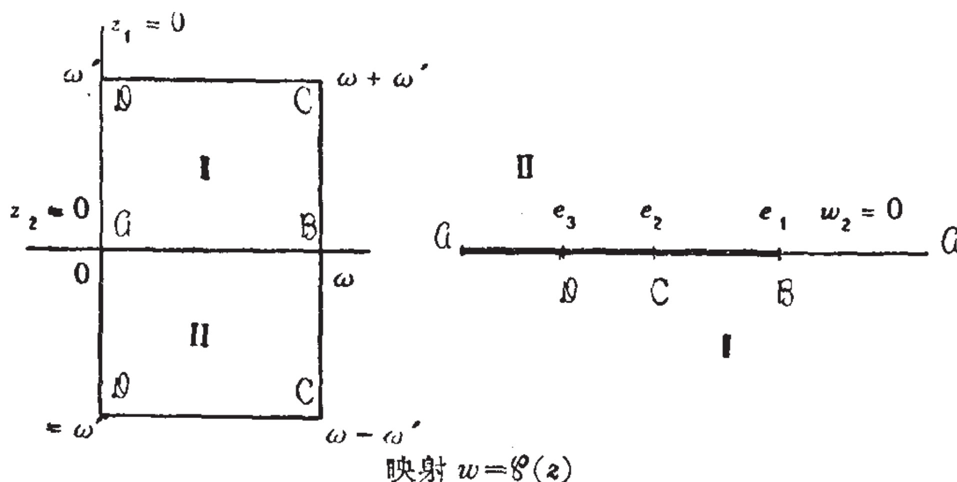
λ-羣的基本域由直綫 $\operatorname{Re}\tau=\pm 1$ 及圓 $|2\tau\pm 1|=1$ 圍成; $\operatorname{Re}\tau\geqslant 0$ 上的边界点屬于这个域,而 $\operatorname{Re}\tau<0$ 的边界点則不屬于它. 可以証明 $\lambda(\tau)$在 λ 羣的基本域中取不等于 0 及 1 的每一有限值恰巧一次,这就是解决反演問題(見 13-20 節)的关鍵:可用以証明雅可比橢圓函数在模的平方取 $\neq 0, 1$ 的任一数时是唯一地确定的.

13-25. 保形映射

橢圓積分、橢圓函数及其它有关函数出現在許多重要的保形映射中. 这样的保形映射的許多例子以及某些進一步的研究可在 Kober 的"保形表示大成" (Dictionary of Conformal representations) (1952, p. 170–200) 一書中找到. 在这一節里,我們將簡略地說明几个比較重要的映射. 在整个这一節中,我們假設是"实"的情形:

$$0<k<1,\ 0<q<1,\ \omega \text{ 实数},\ \omega' \text{ 虛数},\ K, K' \text{ 实数},$$

并令 $e_1>e_2>e_3$. 置 $\operatorname{Re} z=z_1$, $\operatorname{Im} z=z_2$, 对于其他的复变数也如此. 在說明一个复变数平面映射于另一复变数平面的保形映射的圖中,对应的点將以同一字母表示.



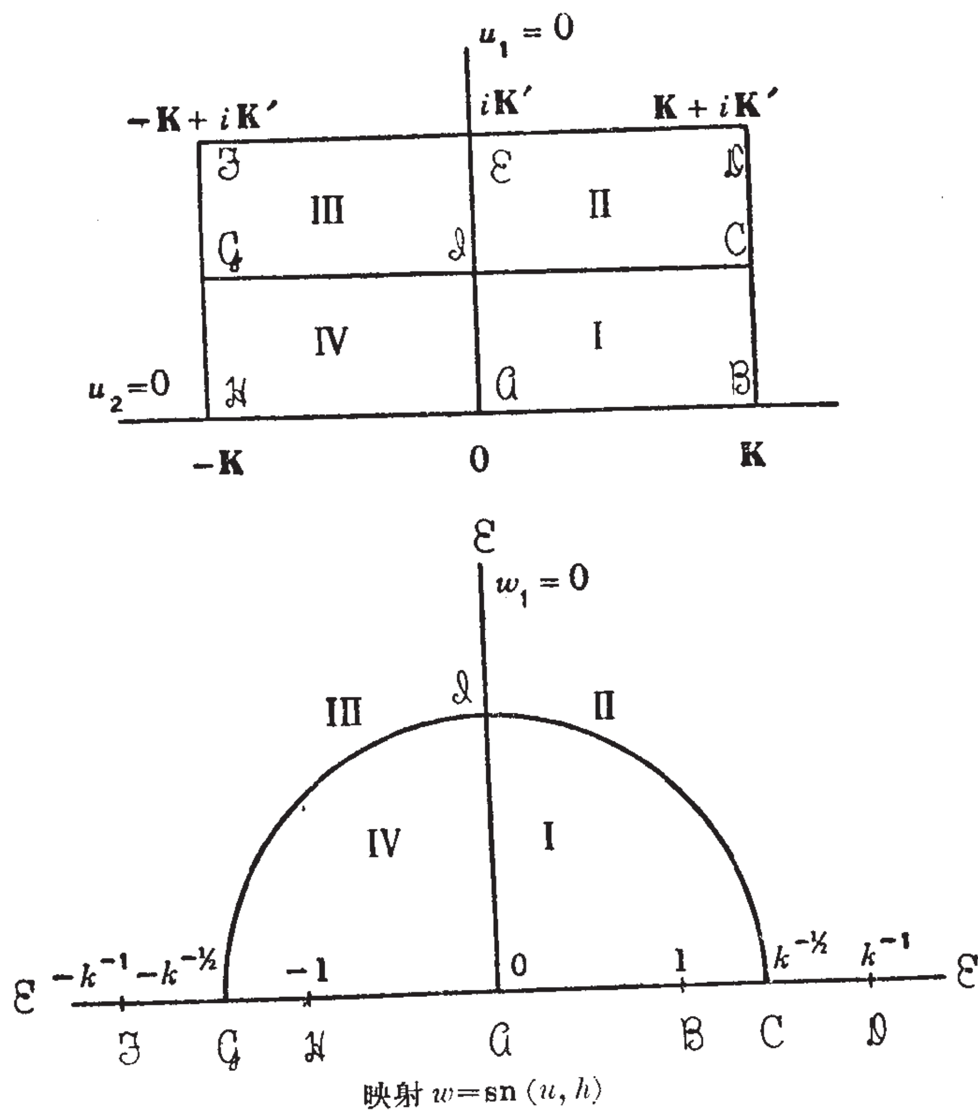
映射 $w=\wp(z)$

函数 $w=\wp(z)$. 当 z 描出頂点为 $0, \omega, \omega+\omega', \omega'$ 的矩形的边界时，变量 w 是实数并从 ∞ 减小为 $e_1, e_2, e_3, -\infty$（見 13–15 節）. 函数將矩形的内部映成 w 的下半平面. 根据許瓦兹的反射原理可知 z 平面中以 $-\omega', \omega-\omega', \omega+\omega', \omega'$ 为頂点的矩形將映成沿 $-\infty$ 至 e_1 剖割的整个 w 平面.

在双紐綫的情形下，$g_3=0$, $g_2>0$, 于是 $e_2=0$, $e_2=-e_1$. z 平面上的矩形变为一正方形，連接 0 及 $\omega+\omega'$ 的对角綫 $\mathfrak{GC}$ 將映为 w 平面上的負虛軸，連接 ω 及 ω' 的对角綫 $\mathfrak{BD}$ 將映为 w 平面上以 $e_2=0$ 为圓心，以 e_1 为半徑的圓的下半部分. z 平面上以 $\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega', \omega, \omega'+\omega$ 为頂点的直等腰三角形的内部將映为 w 平面上以 e_1 为半徑的圓的第四象限.

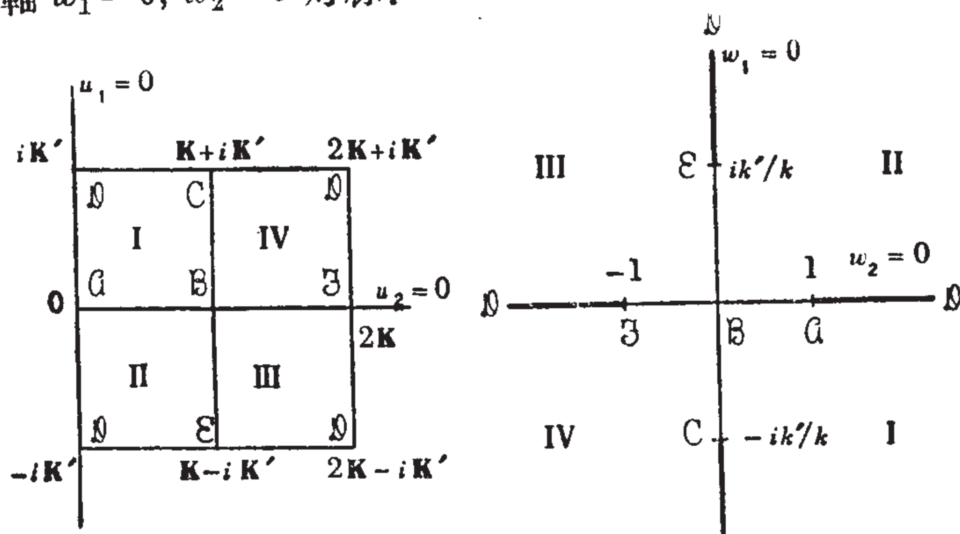
函数 $w=\operatorname{sn}(u, k)$. 从 13–18 節可知 u 平面上以 $0, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}'$, $i\boldsymbol{K}'$ 为頂点的矩形的内部將映成 w 平面的第一象限，矩形 $-\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}'$, $-\boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}'$ 將映为 w 平面的上半部，矩形 $\pm\boldsymbol{K}\pm i\boldsymbol{K}'$ 映成沿 $-\infty$ 至 -1, 1 至 ∞ 剖割的整个 w 平面. 可以証明（参看 Dixon, 1894, 附錄 A）綫 $u_1=$ 常数，$u_2=$ 常数映成 w 平面上的共焦重間点四次綫的双正交系，其焦点为 ± 1, $\pm k^{-1}$, 这些四次綫同时关于 w_1 及 w_2 軸对称. 对应于 $u_1=$ 常数的四次綫具有二枝，其一对应于 $u_1>0$, 圍繞 $\mathfrak{BD}$, 其另一对应于 $u_1<0$. 圍繞 $\mathfrak{GN}$. 对应于 $u_2=0$ 的四次綫是卵形綫，圍繞 $\mathfrak{NB}$. 特别是，对于 $u_2=(n+\frac{1}{2})\boldsymbol{K}'$, 則得一圓，見 13–18 (1). 其他細節見圖.

函数 $w=\operatorname{cn}(u, k)$. u 平面上的矩形 $0, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}', i\boldsymbol{K}'$ 的内部映成 w 平面的第四象限，矩形 $-\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}', -\boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}'$ 映成沿 0 至 1 剖割的 w 平面的右半平面，矩形 $-i\boldsymbol{K}', \boldsymbol{K}-i\boldsymbol{K}', \boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}'$, $i\boldsymbol{K}'$ 映成沿 1 至 ∞ 剖割的右半平面，矩形 $\pm i\boldsymbol{K}', 2\boldsymbol{K}\pm i\boldsymbol{K}'$ 映成沿 $-\infty$ 至 -1, 1 至 ∞, $-i\infty$ 至 $-ik'/k$ 及 ik'/k 至 $i\infty$ 剖割的整个 w 平面. 綫 $u_1=$ 常数，$u_2=$ 常数映成 w 平面上共焦重間点四次綫的双正交系，其焦点为 ± 1, $\pm ik'/k$. 二族綫都是卵形綫，对



映射 $w=\operatorname{sn}(u, h)$

应于 $u_1=$ 常数的圍繞 $\mathfrak{C}\mathfrak{E}$, 对应于 $u_2=$ 常数的圍繞 $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$. 二族綫都关于軸 $w_1=0$, $w_2=0$ 对称.

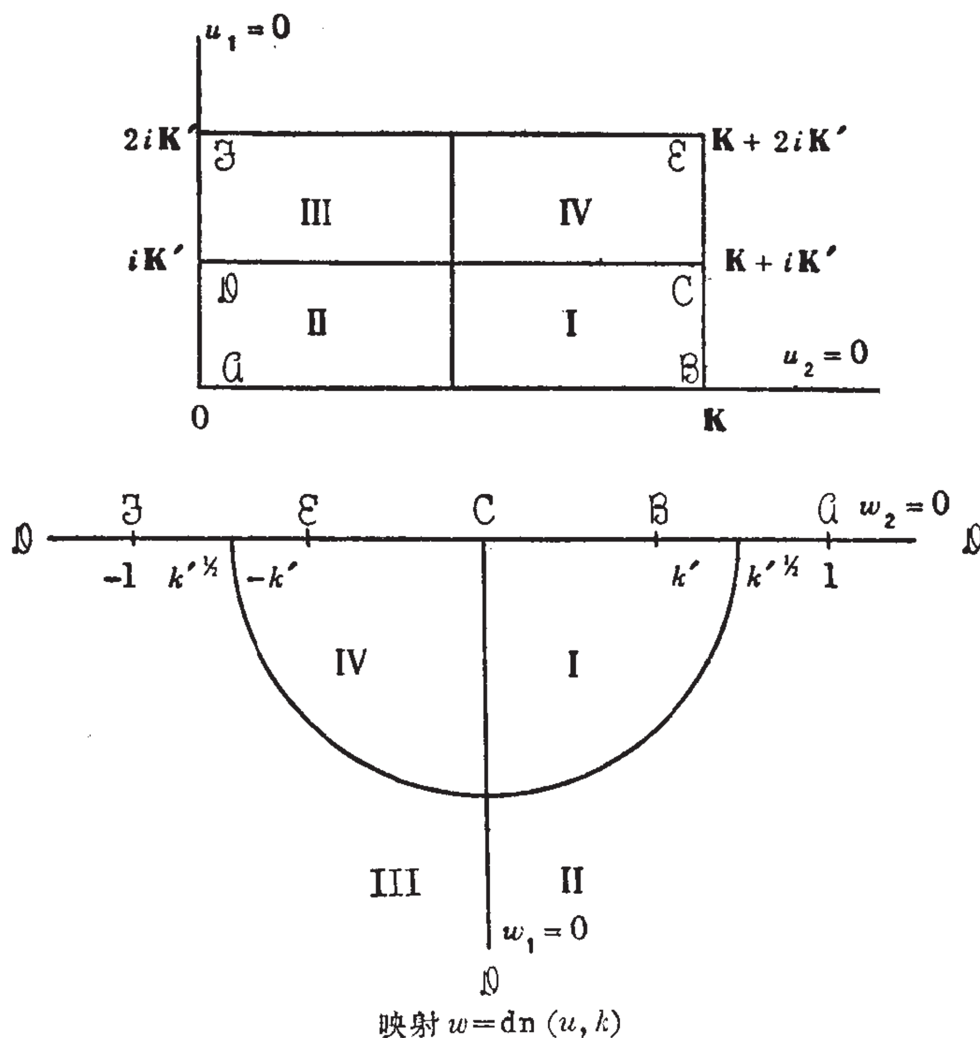


映射 $w=\operatorname{cn}(u, k)$

函数 $w=\mathrm{dn}\,(u, k)$. 根据表 7 (13–17 節) 及表 11 (13–22 節) 可知

$$\mathrm{dn}\,(u, k)=k'\,\mathrm{sn}\,(\mathbf{K}'-i\mathbf{K}+iu, k'),$$

因此,映射 $w=\mathrm{dn}\,(u, k)$可从 $w=\mathrm{sn}\,u$ 的映射中推出.



映射 $w=\mathrm{dn}\,(u, k)$

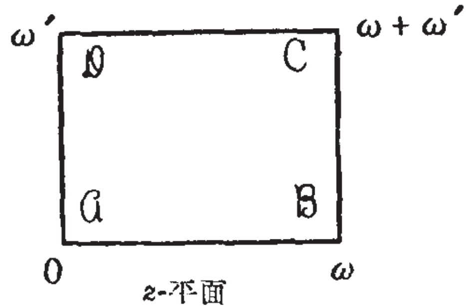
特别是,矩形 $0, \mathbf{K}, \mathbf{K}+2i\mathbf{K}', 2i\mathbf{K}'$ 將映成 w 的下半平面,如圖所示,而矩形 $0, 2\mathbf{K}, 2\mathbf{K}+2i\mathbf{K}', 2i\mathbf{K}'$ 則映成沿 $-\infty$ 至 -1 及 1 至 ∞ 剖割的整个 w 平面. 綫 $u_1=$常数, $u_2=$常数映成共焦重圓点四次綫的双正交系,焦点为 $\pm 1, \pm k'$, 特别是綫 $u_1=(m+\frac{1}{2})\mathbf{K}$ 將映成圓心在 $w=0$ 上半徑为 $k'^{1/2}$ 的圓.

函数 $w=\zeta(z)+e_\alpha z$. 顯然 $\zeta(z_1)$是实数, $\zeta(iz_2)$ 是虚数,根据 13–13 (18)有

$$\zeta(\omega+iz_2)-\zeta(\omega)=\zeta(iz_2)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(iz_2)}{\wp(iz_2)-e_1},$$

$$\zeta(\omega'+z_1)-\zeta(\omega')=\zeta(z_1)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(z_1)}{\wp'(z_1)-e_3},$$

这二表达式中，第一个是虚的，第二个是实的．研究一下 z 平面上矩形 $0, \omega, \omega+\omega', \omega'$ 的映射可知 $\mathfrak{AB}$ 及 $\mathfrak{CD}$ 映成 w 平面上的水平綫，$\mathfrak{BC}$ 及 $\mathfrak{AD}$ 映成垂直綫 $(\alpha=1, 2, 3)$．此外：



$w(\mathfrak{A})=\infty, w(\mathfrak{B})=\eta+e_\alpha\omega,$

$w(\mathfrak{C})=\eta+\eta'+e_\alpha(\omega+\omega'),$

$w(\mathfrak{D})=\eta'+e_\alpha\omega'.$

現在我們來討論一下 $\eta+e_\alpha\omega$ 及 $(\eta'+e_\alpha\omega')/i$ 的符号．从 13-16 (9), (10), (11)及 13-8 (25), (26)式有

$$(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta+e_1\omega)=E>0,$$

$$(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta+e_2\omega)=E-(e_1-e_3)^{-1/2}(e_1-e_2)\omega$$
$$=E-k'^2\mathbf{K}=k^2B>0,$$

$$(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta+e_3\omega)=E-(e_1-e_3)^{1/2}\omega$$
$$=E-\mathbf{K}=-k^2D<0.$$

$$-i(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta'+e_3\omega')=-E'<0,$$

$$-i(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta'+e_2\omega')=-E'-(e_1-e_3)^{-1/2}(e_2-e_3)i\omega'$$
$$=-E'+k^2\mathbf{K}'=-k'^2B'<0,$$

$$-i(e_1-e_3)^{-1/2}(\eta'+e_1\omega')=-E'-(e_1-e_3)^{1/2}i\omega'$$
$$=\mathbf{K}'-E'=k'^2D'>0.$$

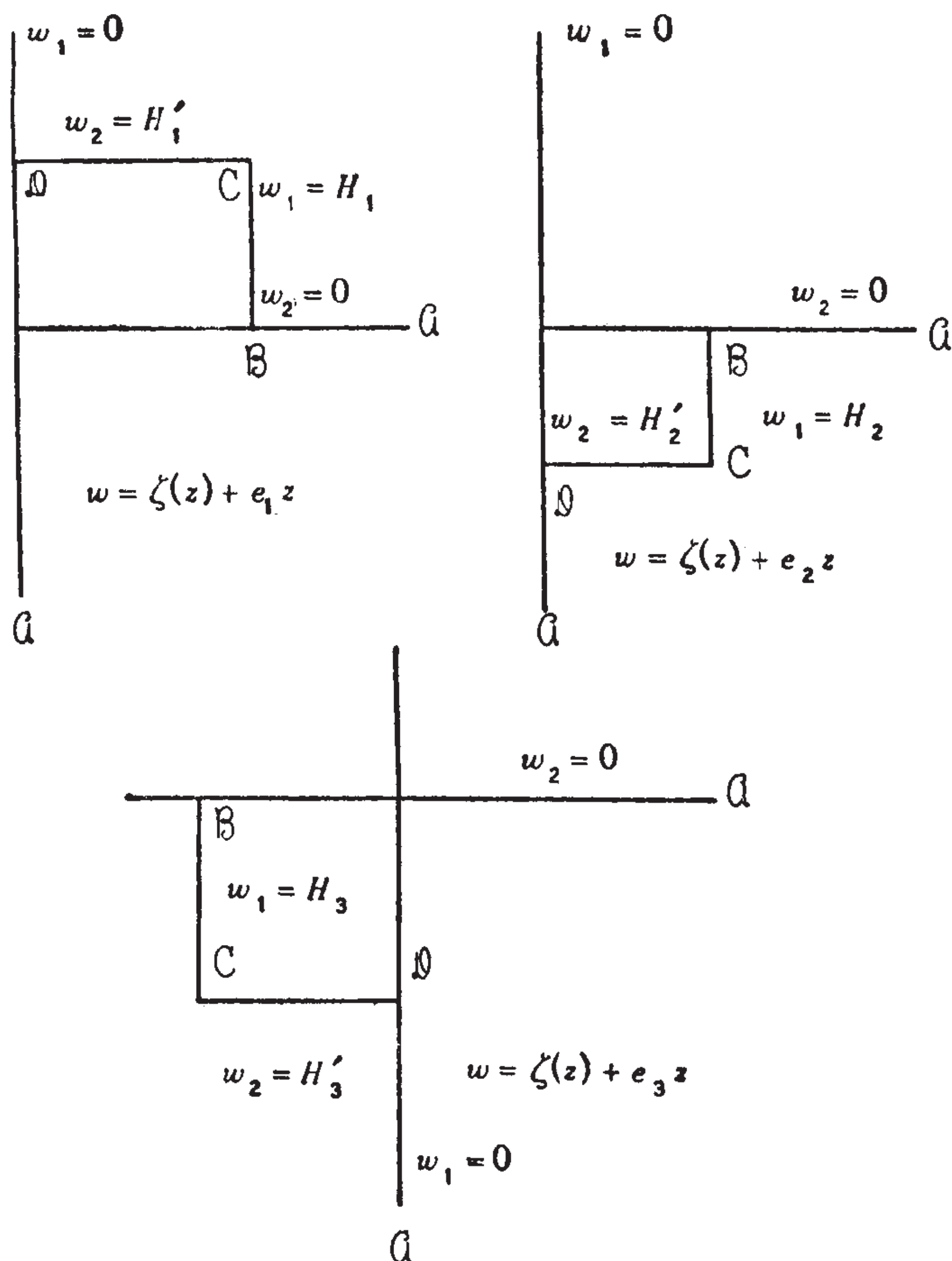
在說明矩形 $\mathfrak{ABCD}$ 的映射 $w=\zeta(z)+e_\alpha z$ 的圖中，我們应用簡号：

$$\eta+e_\alpha\omega=H_\alpha,\quad \eta'+e_\alpha\omega'=H'_\alpha i.$$

从上面的討論中可知

$$H_1>H_2>0>H_3,\quad H'_1>0>H'_2>H'_3.$$

在每一情形下，$\mathfrak{ABCDA}$（依这一順序）左边的部分平面就是矩形的映像．反射于矩形的各边上后可得下面的結果．函数 $w=\zeta(z)+e_1z$ 將 z 平面上的矩形 $\pm\omega, \pm\omega+2\omega'$ 的内部映成为



w 平面上以 $\pm H_1$, $\pm H_1+2iH_1'$ 为偶角的二个半無限水平帶外部的区域．函数 $w=\zeta(z)+e_2z$ 將 z 平面上的矩形 $\pm\omega\pm\omega'$ 的內部映成 w 平面上矩形 $\pm H_2\pm iH_2'$ 的外部．函数 $w=\zeta(z)+e_3z$ 將 z 平面上的矩形 $\pm\omega'$, $2\omega\pm\omega'$ 映成 w 平面上以 $\pm iH_3'$, $2H_3\pm iH_3'$ 为偶角的二半無限垂直帶的外部区域．

映射 $w=\zeta(z)+e_2z$ 可与上面的一个映射組合后，把矩形的外部映成半平面．

参 考 文 献

Appell, Paul and Émile Lacour, 1922: *Fonctions elliptiques et applications*, Gauthier-Villars, Paris.

Bianchi, Luigi, 1916: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, 2nd edition, Spoerri, Pisa.

Burkhardt, Heinrich and Georg Faber, 1920: *Elliptische Funktionen* 3rd edition, Gruyter, Berlin.

Burnside, W. S. and A. W. Panton, 1892: *Theory of equations*, 3rd edition, Longmans, Roberts and Green, London.

Clebsch. Alfred, 1865: *J. f. Math.* 64, 210-270.

Dixon, A. C., 1894: *Elliptic functions with examples*, Macmillan, and Co. Ltd., London.

Enriques, Federigo and Oscar Chisini, 1934: *Funzioni ellittiche ed abeliane Vol. IV Della Teoria geometrica delle equazioni, ecc.* Zanichelli, Bologna.

Fletcher, Allan, J. C. P. Miller, and Louis Rosenhead, 1946: *An index of mathematical tables*, Scientific Computing Service, London.

Fricke, Robert, 1913: *Elliptische Funktionen, Encyklopädie, der mathematischen Wissenschaften*, v. 2, pt. 2, p. 181-348, B. G. Teubner, Leipzig.

Fricke, Robert, 1916-1922: *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen* I, II, B. G. Teubner, Leipzig.

Gröbner, Wolfgang and Nikolaus Hofreiter, 1949: *Integraltafel, Erster Teil, Unbestimmte Integrale*, Springer-Verlag Wien.

Gröbner, Wolfgang and Nikolaus Hofreiter, 1950: *Integraltafel, Zweiter Teil, Bestimmte Integrale*, Springer-Verlag Wien.

Hamel, Georg, 1932: *S.-B. Berlin Math. Ges.* 31, 17-22.

Hancock, Harris, 1917: *Elliptic integrals*, Wiley.

Humbert, Pierre, 1922: *Introduction a l'étude des fonctions elliptiques*, Hermann and Cie., Paris.

Hurwitz, Adolph and Richard Courant, 1925: *Funktionentheorie*, 2nd edition, Springer, Berlin.

Jahnke, Eugen and Fritz Emde, 1938: *Tables of functions with formulae and curves*, B. G. Teubner, Leipzig and Berlin.

Kober, Hermann, 1952: *Dictionary of conformal representations*, Dover.

König, Robert and Maximilian Krafft, 1928: *Elliptische Funktionen*, Gruyter, Berlin.

Low, A. R., 1950: *Normal elliptic functions*, University of Toronto press.

Magnus, Wilhelm and Fritz Oberhettinger, 1949: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Meyer zur Capellen, Walther, 1950: *Integraltafeln*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Milne-Thomson, L. M., 1950: *Jacobian elliptic function tables*, Dover, New York.

Neville, E. H., 1944: *Jacobian Elliptic Functions*, Oxford, Clarendon Press.

Oberhettinger, Fritz and Wilhelm Magnus, 1949: *Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik*, Springer, Berlin.

Prasad, Ganesh, 1948: *An introduction to the theory of elliptic functions and higher transcendentals*, University of Calcutta.

Radon, Brigitte, 1950: *Atti Accad. Naz. Lincei, Mem., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) 2, 69–109.

Roberts, W. R. Westropp, 1938: *Elliptic and hyperelliptic integrals and allied theory*, Cambridge University Press.

Spenceley, G. W. and R. M. Spenceley, 1947: *Smithsonian Elliptic Functions Tables*, The Smithsonian Institute Washington.

Tricomi, F. G., 1935: *Boll. Un. Mat. Ital.* 14, 213–218 and 277–282.

Tricomi, F. G., 1936: *Boll. Un. Mat. Ital.* 15, 102–195.

Tricomi, F. G., 1937: *Funzioni ellittiche*, Bologna, Zanichelli, 1951 (German edition, Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1948: second Italian edition 1951).

Whittaker, E. T. and G. N. Watson, 1927: *Modern Analysis*, 4th edition, Cambridge University press.

索　引

（数字代表章節）

二　划

四　划

五 划

六 划

七　　划

八 划

九　　划

十　　划

十 一 划

十二划

十 三 划

十 四 划

十 五 划

十 六 划

十 七 划

十 八 划

記　法　表

（数字代表章節）

I

J

K

L

N

O

P

Q

R

S

T

U

各种記法

arg z 复数 z 的幅角
Im z 复数 z 的虚部
Re z 复数 z 的实部
γ 欧拉-麦歇倫尼常数
$D = \dfrac{d}{dx}$
$D_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$
∇_ν 貝塞尔微分算符
$g_m = \dfrac{(\frac{1}{2})_m}{m!}$
$(\alpha)_n = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$
(ν, m) 亨克尔符号
$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ 矢量的标積
(ϕ, ψ) 函数的标積
$\|\mathfrak{x}\|$ 矢 $\mathfrak{x}$ 的長
$\sim$ 近似相等或漸近相等
$⨍$ 積分的柯西之值
$\int_{+\infty}^{(0+)}$ 回綫積分

人名对照表(1)

A

Abel 阿培耳
Achyeser 阿却才
Airey 爱莱
Airy 爱里
Aitken 艾肯
Anger 恩乔
Appell 阿貝尔

B

Bailey 巴萊
Barnes 巴尼斯
Basset 白塞特
Bernoulli 柏努利
Bernstein 勃司丁
Bessel 貝塞尔
Bijl 拜吉尔
Bochner 布克納
Böhmer 布牟
Bourget 布吉特
Buchholz 布契霍兹

C

Caton 克頓
Cauchy 柯西
Cayley 卡萊
Charlier 查萊
Cherry 齐雷
Christoffel 克列司托費耳
Césaro 賽薩洛
Clebsch 克里許
Cooke 柯克
Cooper 柯潘
Cornu 科涅
Coulomb 庫侖
Cramér 克萊美
Crum 克萊姆

D

Darboux 达布克司
Darwin 达文
Debye 第拜
Demir 第馬
Dhar 戴
Didon 达頓
Dini 狄尼
Dirichlet 狄里克雷
Doetsch 多許

E

Emde 爱姆特
Erdélyi 爱尔台里
Euler 欧拉

F

Falkenberg 法根堡
Fejér 費爵
Feldheine 法海英
Ferrar 斐勒
Fischer 菲希
Fourier 富里哀
Fresnel 弗列司納耳
Fricke 弗立克
Funk 范克

G

Gauss 高斯
Gegenbauer 盖根堡
Gibbs 吉布斯
Glaisher 格拉希
Gonin 戈寧

Graf 格喇夫
Gram 格侖
Gray 格雷
Greenleaf 格林李夫
Greenwood 格林伍德
Gubler 古勃勒
Gupta 古潑达

H

Hahn 亨
Hankel 亨克尔
Hansen 亨生
Hardy 哈台
Hartree 哈得利
Hecke 希司克
Heine 希英
Hermite 漢米特
Herglotz 漢格洛茨
Heun 熊
Hilb 希尔勃
Hille 希耳
Hobson 霍勃生
Hurwitz 赫威兹

I

Ince 印斯

J

Jackson 爵克生
Jacobi 雅可比
Jahnke 揚基

K

Kampé de Feriet 康拜·特·范利
Kapteyn 卡普頓
Kelvin 开耳芬
Koschmilder 科許米达
Krall 克賴耳
Kramp 克倫潑
Krawtchouk 克罗却克
Kummer 康曼尔

L

Lagrange 拉格郎日
Laguerre 拉盖尔
Landen 侖頓
Langer 倫乔
Laplace 拉普拉斯
Laurent 劳倫特
Lauricella 劳列西拉
Lebesgue 李比司
Leibniz 萊白尼兹
Legendre 勒上特
L'Hospital 罗必比塔
Liouville 刘維尔
Lommel 隆美耳
Low, A. R. 劳

M

MacDonald 麦唐納
MacRobert 麦克罗勃特
Magnus 麦格紐斯
Markoff 馬科夫
Mathews 馬鳩斯
Maxwell 馬克斯威
Mehler 米勒
Meijer 梅杰
Meixner 米克斯奈
Miller 密勒
Moebius 馬別司

N

Neville 倪維尔
Neumann 紐孟
Nicholson 聶却尔生
Nielsen 聶尔生

O

Oberhettinger 奥勃赫丁乔
Orr 沃尔

P

R

S

T

V

U

W

Y

人名对照表(2)

三 划

万·文 Van Veen

四 划

巴尼斯 Barnes
巴萊 Bailey
巴塞凡耳 Parseval
开耳芬 Kelvin
戈寧 Gonin

五 划

白塞特 Basset
古勃勒 Gubler
古潑达 Gupta
布克納 Bochner
布吉特 Bourget
布牟 Böhmer
布契霍兹 Buchholz
卡萊 Cayley
卡普頓 Kapteyn
台劳 Tayler
弗立克 Fricke
弗列司納耳 Fresnel

六 划

吉布斯 Gibbs
托司肯諾 Toscano
托特 Todd
西格耳 Siegel
米克斯奈 Meixner
米勒 Mehler
齐雷 Cherry
刘維尔 Liouville
印斯 Ince
多許 Doetsch
达文 Darwin
达布克司 Darboux
达頓 Didon
艾肯 Aitken
孙松 Sansone

七 划

克列司托費耳 Christoffel
克里許 Clebsch
克拉美 Cram'r
克罗却克 Krawtchouk
克萊姆 Crum
克倫潑 Kramp
克頓 Caton
克賴耳 Krall
沙司 Szász
沙湼 Sonine
沃尔 Orr
李比司 Lebesgue
李茨 Riesz
希尔勃 Hilb
希司克 Hecke
希耳 Hille
希英 Heine
狄尼 Dini
狄里克雷 Dirichlet
狄奇馬齐 Titchmarsh
車比雪夫 Tchebichef
罗塔奇 Rotach
罗薩 Rosser
貝塞尔 Bessel
劳 Low
劳列西拉 Lauricella
劳倫特 Laurent

亨 Hahn
亨生 Hansen
亨克尔 Hankel

八 划

侖頓 Landen
阿貝尔 Appell
阿却才 Achyeser
阿培耳 Abel
松牟費尔特 Sommerfeld
拉甘尔 Laguerre
拉格郎日 Lagrange
拉普拉斯 Laplace
法根堡 Falkenberg
法海英 Feldheine
泊松 Poisson
波利雅 Pólya
罗 Rau
罗司比塔 L'Hospital
罗特列恰 Rodrigue
欧拉 Euler

九 划

哈台 Hardy
哈得利 Hartree
柏努利 Bernoulli
柯西 Cauchy
柯克 Cooke
柯潘 Cooper
查萊 Charlier
科許米特 Koschmilder
科湼 Cornu
韋尔司特拉斯 Weierstrass
韋勃 Weber
拜吉尔 Bijl
勃司丁 Bernstein

十 划

高斯 Gauss
倫乔 Langer
倪維尔 Noville
庫侖 Coulomb
格林伍德 Greenwood
格林李夫 Greenleaf
格拉希 Glaisher
格侖 Gram
格雷 Gray
格喇夫 Graf
恩乔 Anger
范克 Funk
紐孟 Neumann
爱尔台里 Erdélyi
爱里 Airy
爱萊 Airey
爱姆特 Emde
特列柯米 Tricomi
索比 Schöbe
馬克斯威 Maxwell
馬別司 Moebius
馬科夫 Markoff
馬鳩斯 Mathews
烏司賓斯基 Uspensky

十一划

麦克罗勃特 MacRobert
麦唐納 MacDonald
麦格紐斯 Magnus
第拜 Debye
第馬 Demir
康拜·特·范利 Kampé de Fériet
康曼尔 Kummer
梅杰 Meijer
密勒 Miller
許瓦茲 Schwarz
許拉弗里 Schläfli
許洛米耳 Schlömilch
許韋特 Schwid
許密德 Schmidt
屠侖 Turan
盖根堡 Gegenbauer
勒上特 Legendre

十 二 划

韡里司 Wallis
韡特生 Watson
萊白尼兹 Leibniz
揮普耳 Whipple
富里哀 Fourier
非希 Fischer
斐勒 Ferrar
隆司基 Wronski
隆美耳 Lommel
斯本司 Spence
斯高 Szegö
斯第耳吉司 Stieltjes
斯特拉夫 Struve
斯蒂文生 Stevenson
斯透姆 Sturm
森坎 Shanker
普倫吉萊耳 Plancherel
普拉齐克 Pollaczek
普拉特 Pollard
普萊姆 Prym
雅可比 Jacobi

十 三 划

楊 Young
楊基 Jahnke
頓納萊 Tannery
雷門尼强 Ramanujan
雷皮 Raabe
奥勃赫丁乔 Oberhettinger
費爵 Fejér

十 四 划

漢米特 Hermite
漢格洛茨 Herglotz
赫威兹 Hurwitz
熊 Heun

十 五 划

黎曼 Riemann
潘隆 Perron

十 六 划

霍勃生 Hobson

十 七 划

謝希特林 Schafheitlin
爵克生 Jackson
賽薩洛 Césaro

十 八 划

魏尔司 Wells
魏金司 Wilkins
薩托 Satô
聶尔生 Nielsen
聶却尔生 Nicholson
戴 Dhar